

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМІДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖	周学圣	编演
郭大钧	邵品琮	主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定晖编. —2版—济南:山东科学技术出版社, 1999. 9

ISBN 7-5331-0099-9

I. Б… II. 费… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43960 号

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(一)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东莒县印刷厂印刷

787mm×1092mm 32 开本 15 125 印张 331 千字

1999 年 11 月第 2 版第 8 次印刷

印数: 212 601—222 600

ISBN 7—5331—0099—9

0·5 定价:13.30 元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出

版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

目 录

第一章 分析引论.....	1
§ 1. 实数.....	1
§ 2. 叙列的理论	25
§ 3. 函数的概念	95
§ 4. 函数的图形表示法.....	128
§ 5. 函数的极限.....	226
§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶.....	357
§ 7. 函数的连续性.....	375
§ 8. 反函数, 用参数表示的函数	425
§ 9. 函数的一致连续性.....	444
§ 10. 函数方程	463

第一章 分析引论

§ 1. 实 数

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只须证明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n = 1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真, 则它对其次的一自然数 $n + 1$ 也为真.

2° 分割 假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足于下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数, 这样的分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数. (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值 假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式或立:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

* 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

(1) 每一个 $x \in X^*$ 满足不等式

$$x \geq m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 设 $a (a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有数数字的单位的一半, 则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

$$1. \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X .

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设对于 $n = k$ (自然数) 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时等式也成立.

于是, 由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} \\ &= \left\{ \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} \right\}^2 \\ &= [1 + 2 + \cdots + (k + 1)]^2, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

$$4. \quad 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k \\ &= (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$, 求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时, 由于

$$[a+b]^{[1]} = a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \quad (1)$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]} \cdot (a+b-kh). \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned} (a+b)^{[k+1]} &= (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\ &= (a+b-kh) \{ C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} \\ &\quad + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \} \\ &= \{ (a-kh) + b \} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} \\ &\quad + \{ [a-(k-1)h] + (b-h) \} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} \\ &\quad + \cdots + \{ a + (b-kh) \} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\ &= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} \\ &\quad + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} \\ &\quad + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_k^0 + C_k^1) a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_{k+1}^0 a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_{k+1}^k a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},
\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)}$ 可推得下式成立:

$$(a+b)^{(k+1)} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},$$

即对于 $n = k+1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}. \quad (3)$$

在式子

$$a^{(n)} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中, 令 $h=0$, 即得

$$a^{(n)} = a^n. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 x_1, x_2, \cdots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时, 此式取等号.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 由于 $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 大于 -1 , 所以 $1+x_i > 0$. 因而有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \\ & \quad + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}). \end{aligned}$$

由于 $x_ix_j \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立,

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \end{aligned}$$

7. 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中, 设

$$x_i = x \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

即得证

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出, 仅当 $x=0$ 时, 上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n = 2$, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 则

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 (k=1, 2, \dots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n = 2$ 时, 因为 $2! \cdot 4! = 48$, 及 $[(2+1)!]^2 = 36$, 所以, $2! \cdot 4! > [(2+1)!]^2$, 故不等式成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$2! \cdot 4! \cdots (2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$2! \cdot 4! \cdots (2k+2)! > [(k+1)!]^k (2k+2)!$$

$$= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2) \\ > [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立. 于是, 据归纳法原理, 本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n = 1$ 时, 因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式显然成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n = k + 1$ 而言, 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} &< \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \\ &= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}, \end{aligned}$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的. 于是, 最后得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$. 若 $a \leq 0$, 则显然存在 $a' > a$ ($a' > 0$) 且 $a' \in A$. 故可设 $a > 0$, 于是 $a^2 \leq c$. 但不可能有 $a^2 = c$. 因若 $a^2 = c$, 设 $a = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必 $q = 1$, 从而 $c = p^2$, 此与假定矛盾, 故必 $a^2 < c$. 下面我们证明, 存在正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a + \frac{1}{n}$ 也属于 A .

上述不等式相当于:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此, 只要取

$$n > \frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此, 不论 a 为 A 类内的怎样的数, 在 A 类内总能找到大于它的数, 故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 \sqrt{c} .

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成: A 类包含所有的有理数 a , 而 $a^3 < 2$; B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$, 即 $a^3 < 2$. 下证必可取正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上, 上式相当于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$. 若 $a \leq 0$, 取 $n = 1$ 即可. 若 $a > 0$, 注意到 $n \geq 1$, 即知若取 n 充分大, 使 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$, 则上列各式均成立. 从而 $a + \frac{1}{n} \in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b \in B$, 则 $b^3 \geq 2$. 下证不可能有 $b^3 = 2$. 事实上, 若 $b^3 = 2$, 设 $b = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$, $p^3 = 2q^3$, 从而 p^3 为偶数, 因此 p 必为偶数: $p = 2r$, r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的, 故 q 必为奇数, 从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$, 故 q^3 又必是偶数, 因此矛盾. 由此可知必有 $b^3 > 2$. 仿前面之证, 可取正整数 n , 使 $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$, 从而 $b - \frac{1}{n} \in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$;

(6) $\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B : 一切有理数 $a \leq 0$ 以及满足 $a^2 < 2$ 的正有理数 a 都归于 A 类, 一切满足 $b^2 > 2$ 的

正有理数 b 归入 B 类. 又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B' : 一切有理数 $a' \leq 0$ 以及满足 $a'^2 < 8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类, 一切满足 $b'^2 > 8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类. 我们知道, 根据实数加法的定义, 满足不等式.

$$a + a' < c < b + b' \quad (\text{对任何 } a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B')$$

的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$. 因此, 如果我们能证明恒有 $(a + a')^2 < 18$ (当 $a + a' > 0$ 时), $(b + b')^2 > 18$, 则有 $a + a' < \sqrt{18} < b + b'$. 于是得知 $\sqrt{18} = c = \sqrt{2} + \sqrt{8}$.

若 $a + a' > 0$, 则 a 与 a' 中至少有一个为正, 从而由 $a^2 a'^2 < 16$ 知 $aa' < 4$, 从而 $(a + a')^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' < 2 + 8 + 8 = 18$; 同样, 因 $b^2 > 2, b'^2 > 8, b > 0, b' > 0$, 故 $b^2 b'^2 < 16, bb' > 4, (b + b')^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' > 2 + 8 + 8 = 18$. 于是证毕.

(5) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B 如 (a) 中所示, 再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 A_1/B_1 : 一切有理数 $a_1 \leq 0$ 以及满足 $a_1^2 < 3$ 的正有理数 a_1 归入 A_1 类, 一切满足 $b_1^2 > 3$ 的正有理数 b_1 归入 B_1 类. 根据实数乘法的定义, 满足

$$aa_1 < c_1 < bb_1 \quad (\text{对任何 } a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0, b \in B, b_1 \in B_1)$$

的(正)实数 c_1 存在唯一, 它就是 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 但由于当 $a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0$ 时 $(aa_1)^2 < 6$, 而当 $b \in B, b_1 \in B_1$ 时, $(bb_1)^2 > 6$. 故恒有 $aa_1 < \sqrt{6} < bb_1$. 由此可知 $\sqrt{6} = c_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 证完.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1 , 使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次, 作分割 A/B , 其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a :

如果有 $\frac{p}{q}$ (p, q 互质) 属于 A_1 , 则有

$$a^q < 2^p;$$

而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

15. 求证任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性, 只证本题的后半部分, 分两种情形:

(1) A 中有最大数 \bar{a} . 设 $a \in A$, 此时则有 $a \leq \bar{a}$, 说明 \bar{a} 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a} \in A$, 故对 A 的任何上界 M , 均有 $\bar{a} \leq M$, 故 \bar{a} 为 A 的有上确界.

(2) A 中无最大数, 此时, 作分割 A_1/B_1 : 取集 A 的一切上界归入 B_1 类, 而其余的数归入 A_1 类. 这样, A 中一切数全部落在 A_1 内, A_1 及 A_2 均非空, 且 A_1 中的数小于 B_1 中的数, 这确实是一个实数分割, 易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数, 即 β 是 A 的最小上界, 从而 β 是 A 的上确界.

16. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中正整数 m, n 满足 0

$\langle m < n \rangle$ 所成的集合. 对任何 $\frac{m}{n} \in E$, 显然 $\frac{m+1}{n+1} \in E$ 且 $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$, 又 $\frac{m^2}{n^2} \in E$, 且 $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$; 故 E 中既无最大数, 也无最小数. 显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2.$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2 < 2$ 的有理数 r 所成的集合. 我们知道, 分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$, 这里 A 表由一切非正有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的正有理数 r 所成的类, B 表其余有理数构成的类, 并且已证 A 中无最大数, 于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样, 分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$, 这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的负有理数 r 构成的类, A' 表其余有理数构成的类, 并且 B' 中无最小数. 于是, 显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

18. 设 $\{-x\}$ 为数的集合; 这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数. 证明等式:

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{-x\} = m'$, 则有:

(1) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \geq m'$;

(2) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' < m' + \epsilon.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \leq -m'$;

(4) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $x' \in \{x\}$, 使

$$x' > -m' - \epsilon.$$

由(3)及(4)知数 $-m' = \sup\{x\}$, 即 $m' = -\sup\{x\}$, 所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

(5) 设 $\sup\{-x\} = M'$, 则有:

(5) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \leq M'$;

(6) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' > M' - \epsilon.$$

由(5)及(6)推得:

(7) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \geq -M'$;

(8) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $x' \in \{x\}$, 使

$$x' < -M' + \epsilon.$$

由(7)及(8)知数 $-M' = \inf\{x\}$, 即 $M' = -\inf\{x\}$, 所以, $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$. 证明等式:

(a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

(b) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 则有:

(1) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时, $x \geq m_1, y \geq m_2$;

(2) 对于任何的正数 ϵ , 存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使

$$x' < m_1 + \frac{\epsilon}{2}, \quad y' < m_2 + \frac{\epsilon}{2}.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $x+y \in \{x+y\}$ 时(其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$),

$$x + y \geq m_1 + m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' + y' \in \{x + y\}$ (其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$), 使

$$x' + y' < (m_1 + m_2) + \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $m_1 + m_2 = \inf\{x + y\}$, 即

$$\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

(6) 同法可证

$$\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$. 证明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x\}\sup\{y\} = \sup\{xy\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 由于恒有 $x \geq 0, y \geq 0$. 故必 $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$. 于是

(1) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时, $x \geq m_1 \geq 0, y \geq m_2 \geq 0$;

(2) 对任何的正数 ε , 存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使

$$0 \leq x' < m_1 + \varepsilon, 0 \leq y' < m_2 + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $xy \in \{xy\}$, 其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}, xy \geq m_1 m_2$;

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' y' \in \{xy\}$ (其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$), 使

$$0 \leq x' y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$.

由(3)及(4)知数 $m_1 m_2 = \inf\{xy\}$, 即

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(6) 同法可证

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求证不等式:

$$(a) |x - y| \geqslant \left| |x| - |y| \right|;$$

$$(b) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

$$\text{证} \quad (a) \text{ 由 } |x - y| = |x + (-y)| \geqslant |x| - |-y| \\ = |x| - |y|,$$

$$\text{及} \quad |x - y| = |y - x| \geqslant |y| - |x| \\ = -(|x| - |y|),$$

即得

$$|x - y| \geqslant \left| |x| - |y| \right|$$

也可如下证明: 由 $|xy| \geqslant xy$ 知

$$x^2 - 2xy + y^2 \geqslant x^2 - 2|xy| + y^2,$$

$$\text{则} \quad (x - y)^2 \geqslant (|x| - |y|)^2,$$

开方即得

$$|x - y| \geqslant \left| |x| - |y| \right|.$$

$$(b) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - |x_1 + \cdots + x_n|,$$

$$\text{而} \quad |x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2 + \cdots + x_n| \leqslant \cdots \\ \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

所以,

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

解不等式:

$$22. |x + 1| < 0.01.$$

解 由 $|x + 1| < 0.01$ 推得

$$-0.01 < x + 1 < 0.01,$$

所以,

$$-1.01 < x < -0.99.$$

23. $|x - 2| \geq 10.$

解 由 $|x - 2| \geq 10$ 推得

$$x - 2 \geq 10 \quad \text{或} \quad x - 2 \leq -10,$$

所以,

$$x \geq 12 \quad \text{或} \quad x \leq -8.$$

24. $|x| > |x + 1|.$

解 两边平方,即得

$$x^2 > (x + 1)^2 \quad \text{或} \quad 2x + 1 < 0,$$

于是,有

$$x < -\frac{1}{2}.$$

25. $|2x - 1| < |x - 1|.$

解 两边平方,即得

$$(2x - 1)^2 < (x - 1)^2 \quad \text{或} \quad 3x^2 - 2x < 0,$$

解之,得

$$0 < x < \frac{2}{3}.$$

26. $|x + 2| + |x - 2| \leq 12.$

解 令 $x - 2 = t$, 则得

$$|t + 4| + |t| \leq 12 \quad \text{或} \quad |t + 4| \leq 12 - |t|.$$

两边平方,即有

$$t^2 + 8t + 16 \leq 144 - 24|t| + t^2,$$

或

$$3|t| \leq 16 - t.$$

将上式两端再平方,化简整理得

$$t^2 + 4t - 32 \leq 0,$$

于是,有

$$-8 \leq t \leq 4.$$

从而得

$$8 \leq x - 2 \leq 4,$$

即

$$-6 \leq x \leq 6 \quad \text{或} \quad |x| \leq 6.$$

27. $|x + 2| - |x| > 1.$

解 $1 + |x| < |x + 2|$, 将此式两端平方, 化简得

$$2|x| < 4x + 3.$$

再平方之, 化简得

$$4x^2 + 8x + 3 > 0.$$

于是,有

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x < -\frac{3}{2}.$$

后者不适合, 所以,

$$x > -\frac{1}{2}.$$

28. $\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1.$

解 两端平方, 化简得

$$x^2 + \frac{1}{2} < |x^2 - 1|,$$

即

$$x^2 - 1 > x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

前者不可能, 所以,

$$x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2 < \frac{1}{4}$, 解之得

$$|x| < \frac{1}{2}.$$

29. $|x(1-x)| < 0.05.$

解 由 $|x-x^2| < \frac{1}{20}$ 得

$$x^2 - x + \frac{1}{20} > 0 \quad \text{或} \quad x^2 - x - \frac{1}{20} < 0,$$

解之得

$$\begin{cases} \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10} \\ \frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x \quad \text{或} \quad x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10} \quad \text{或} \\ \frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

证 $\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2$
 $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x|x| = x^2.$

31. 当测量长度10厘米时,绝对误差为0.5毫米;当测量距离500千米时,绝对误差等于200米.哪种测量较为精确?

解 用相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

进行比较,其中 a 为被测量的精确值,而 Δ 是绝对误差.

对于前者, $\delta = \frac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%$,

对于后者, $\delta = \frac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%$,

所以,后者测量较为精确.

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1% ,试求此数包含若干位准确数字?

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752} = 0.01$,所以 $\Delta = 0.023752$.

因而,此数包含两位准确数字.

33. 数

$$x = 12.125$$

包含三位准确数字.试求此数的相对误差?

解 因为 x 包含三位准确数字,所以 $\Delta < 0.05$.于是得相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} < \frac{0.05}{12.125} < 0.42\%$$

即

$$\delta < 0.42\%.$$

34. 矩形的边等于:

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内?设其边长取平均值时,矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何?

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$
 $= 9.9102(\text{平方厘米})''',$

$$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02)$$

$$= 10.0902(\text{平方厘米}),$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max},$$

$$S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{平方厘米}),$$

$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(\text{平方厘米}),$$

$$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(\text{平方厘米});$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(\text{平方厘米}),$$

$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leq \frac{0.0902}{10} < 0.91\%.$$

*) 以后各题简写为厘米², 厘米³ 等.

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克, 其体积 $V = 3.2$ 厘米³ ± 0.2 厘米³. 若对物体的重量和体积都取其平均值, 试求物体的比重, 并估计比重的绝对误差和相对误差.

解 比重 $C = \frac{12.59}{3.2}$ 克 / 厘米³ $= 3.93$ 克 / 厘米³.

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} \text{ 克 / 厘米}^3 = 4.20 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.4} \text{ 克 / 厘米}^3 = 3.70 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23 \text{ 克 / 厘米}^3;$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27 \text{ 克 / 厘米}^3;$$

一般地, 比重为 (3.93 ± 0.27) 克 / 厘米³;

$$\delta \leq \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

36⁺. * 圆半径

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差为何?

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi(\text{米}^2)$

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi(\text{米}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84 \pm 1.45)\pi(\text{米}^2)$, 故

$$\delta \leq \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米};$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米};$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 V 界于甚么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则求出的平行六面体的体积可能的绝对误差和相对误差为何?

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leq V \leq 24.9 \times 6.6 \times 1.3$

即 $172.480 \text{ 米}^3 \leq V \leq 213.642 \text{ 米}^3.$

当 x, y, z 均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660 \text{ 米}^3.$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3);$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3).$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

于是,

$$\Delta \leq 20.982 \text{ 米}^3;$$

$$\delta \leq \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

38. 测量正方形的边 x , 此处 $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$, 应有多小的绝对误差, 才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2 ?

解 按题设我们有 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$, 解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此, Δ 取二者中误差较小者, 即

$$\Delta \leq 0.00017(\text{米}) = 0.17 \text{ 毫米},$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米 时, 就能使此正方形的面积精确到 0.001 米^2 .

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米 , 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方米 , 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大*)?

解 按题设我们有

$$(x + \Delta)(y + \Delta) - xy \leq 0.01,$$

即 $\Delta^2 + (x + y)\Delta \leq 0.01,$

由于 $x \leq 10$ 及 $y \leq 10$, 所以只要

$$\Delta^2 + 20\Delta \leq 0.01 \quad \text{或} \quad \Delta^2 + 20\Delta - 0.01 \leq 0$$

即可. 解之, 得

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2} \\ &= 0.000499 < 0.0005(\text{米}). \end{aligned}$$

*) 此题假设 x, y 有相等的绝对误差. 又原著上为“ 0.01 平方米 ”, 面误译为“ 0.01 平方厘米 ”.

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差. 求证:

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

证 设 $x = a + \Delta_x$, $y = b + \Delta_y$,

其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值, Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差, 则有

$$xy - ab = b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= |xy - ab| \\ &\leq |b| \cdot \Delta_x + |a| \cdot \Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y \end{aligned}$$

最后即得

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leq \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此即

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

则称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a) 亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

其中, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列, 称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1) 设

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) 哥西判别法 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充分的条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3° 关于数列的极限的基本定理 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 则有:

(1) 若 $x_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

4° 数 e , 数列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\dots$$

5° 无穷极限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

6° 聚点 设已知数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$$

适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点 (波尔查诺 外尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的, 则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列 x_n 的最小聚点 (有穷的或无穷的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下极限, 而它的最大聚点

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为此叙列的上极限

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

为叙列 x_n 的 (有穷或无穷) 极限存在的必要而且充分的条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即: 对于任一个给定的 $\epsilon > 0$, 求数 $N = N(\epsilon)$

使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \epsilon.$$

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N					

证 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n - 1| < \epsilon$, 只

要

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ 可取

$$N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \varepsilon$. 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N	10	100	1000	10000	...

42. 假若:

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; (c) \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(b) x_n = \frac{1}{n!}; (r) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n.$$

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$;

即证明 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为无穷小 (就是说, 有极限值为 0)

对应着上面四种情形, 填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	...	
N					

证 (a) $|x_n| = \frac{1}{n}$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n} < \epsilon,$$

即只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(6) $|x_n| = \frac{2n}{n^3 + 1} < \frac{2}{n^2}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$\frac{2}{n^2} < \epsilon,$$

即只要 $n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. 取 $N = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(B) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon,$$

即只要 $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\epsilon}$. 取

$$N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(r) $|x_n| = 0.999^n$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$n \lg 0.999 < \lg \epsilon.$$

由于 $\lg 0.999 < 0$, 故只要 $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg 0.999} \approx 2500 \lg \frac{1}{\epsilon}$. *

取

$$N = \left\lceil 2500 \lg \frac{1}{\epsilon} \right\rceil,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

填下表:

ϵ		0.1	0.01	0.001	...
(a)	N	10	100	1000	...
(b)	N	4	14	44	...
(B)	N	4	7	10	...
(r)	N	2500	5000	7500	...

*) 或取 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. 以下各题类似, 不再一一说明.

* *) 查四位数学用表所得的数据.

43. 证明叙列

(a) $x_n = (-1)^n n$, (b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, (B) $x_n = \lg(\lg n)$ ($n \geq 2$)

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有无穷极限 (即成为无穷大), 即:

对任意的 $E > 0$, 求数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	...
N					

证 (a) $|x_n| = n$. 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要

$$n > E.$$

取 $N = [E]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(6) $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}$, 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要 $2^{\sqrt{n}} > E$.

即只要 $n > \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取

$$N = \left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(B) 当 $n > 10$ 时, $\lg n > 1$ 及 $\lg(\lg n) > 0$.

任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要

$$\lg(\lg n) > E,$$

即只要 $n > 10^{(10^E)}$. 取

$$N = [10^{(10^E)}],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

填下表:

E		10	100	1000	10000	...
(a)	N	10	100	1000	10000	...
(6)	N	11	44	99	176	...
(B)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$...

44. 求证

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & \text{当 } n=2k, k \text{ 为自然数,} \\ \frac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1, \end{cases}$

所以,

$$x_{2k} \rightarrow \infty, \quad x_{2k+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

由于 $x_{2k} \rightarrow \infty$, 故 x_n 无界; 但因 $x_{2k+1} \rightarrow 0$, 故 x_n 并不趋于无穷大.

45. 用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

解 (a) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(b) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n < -E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

(c) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

设 n 跑过自然数列, 求下列各式之值:

46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000}{n + \frac{1}{n}} = 0.$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1},$$

解 因为 $\sin n!$ 有界: $|\sin n!| \leq 1$ 及 $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right].$$

解 当 $n=2k$ 时 (k 为自然数),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} + \frac{3}{2k} - \dots - \frac{2k}{2k} = \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

当 $n=2k+1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} - \dots + \frac{2k+1}{2k+1} \\ &= \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

由于取不同方式时, 所得的极限值不同, 所以, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right]$$

不存在.

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

解 设 $f(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$, 由 53 题

$$\begin{aligned} \text{即得 } \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [8f(2n) - 4f(n)] = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

解 设 $f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

则有 $2f(n+1) - g(n) = f(n) + 1$,

又由 $2f(n+1) - f(n) = f(n) + \frac{2n+1}{2^n} = g(n) + 1$,

故 $f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n}$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) + 1] = 3$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$, 故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$$

*) 参看 58 题

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots, \dots,$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

相加之, 得 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$
 $= 1 - \frac{1}{n+1},$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$$

解 由于 $\sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$
 $= 2^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}$
 $= 2^{\left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]}$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]} = 2.$

证明下列等式:

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

证 因为 $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1$
 $> \frac{n(n-1)}{2} \quad (n > 2),$

故 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1};$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

证 因为 $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

证 令 $a = 1 + \lambda \quad (\lambda > 0),$

$$\begin{aligned} \text{则 } a^n &= (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots \\ &+ \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n > 2). \end{aligned}$$

当 $n > 2$ 时, $n-1 > \frac{n}{2}$, 此时,

$$a^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情形:

(1) 当 $k \leq 0$ 时, 这时显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{n-k}} = 0.$$

(2) 当 $k = 1$ 时,

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2},$$

而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0;$$

(3) 当 $k > 0$ 时,

$$\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k,$$

而 $a^{\frac{1}{k}} > 1$, 于是由(1)知, $\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

61. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的自然数,

则当 $n > k$ 时, 有

$$0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \right) \left(\frac{|a|}{k+1} \cdot \frac{|a|}{k+2} \cdots \frac{|a|}{n} \right)$$

$$< |a|^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|a|)^k}{2^n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

62. $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, 若 $|q| < 1$.

证 (1) 当 $0 < q < 1$ 时, 可令 $q = \frac{1}{a}$, 其中 $a > 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = \frac{n}{a^n} \rightarrow 0$;

(2) 当 $-1 < q < 0$ 时, 可令 $q = -q'$, 其中 $0 < q' < 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = (-1)^n nq'^n \rightarrow 0$;

(3) 当 $q = 0$ 时, $nq^n = 0$.

总之, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

*) 利用 60 题的结果。

63. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

证 (1) 当 $a = 1$ 时, 等式显然成立;

(2) 当 $a > 1$ 时, 因为 $(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon$ ($n > 1, \epsilon > 0$), 则当 n 充分大后, 可使 $1 + n\epsilon > a$, 即 $(1 + \epsilon)^n > a$. 事实上, 只要取 $N = \left\lceil \frac{a-1}{\epsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 就可保证这点. 所以,

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon,$$

于是, 当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, 则令 $a = \frac{1}{a'}$, 其中 $a' > 1$.

于是,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{a} - \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \rightarrow 1$.

总之,当 $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

64. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1)$.

证 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 事实上,令 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 则

$a_n > 1$. 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n > \frac{n^2}{4} (a_n - 1)^2,$$

即 $n > \frac{n^2}{4} (\sqrt[n]{n} - 1)^2,$

由此可知

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 成立.

现任给 $\epsilon > 0$. 因 $a' > 1 (a > 1)$, 故存在 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $\sqrt[n]{n} < a'$, 由此可知 ($n > N$),

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \epsilon.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 在 64 题的证明过程中已证.

66. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证 由数学归纳法易证 $n! \geq \frac{1}{2} n^{\frac{n}{2}}$, 从而 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq 2^{\frac{1}{n}}$.

$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, 又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下面的式子哪个大些?

(a) $100n + 200$ 或 $0.01n^2$?; (b) 2^n 或 n^{1000} ?

(c) 1000^n 或 $n!$?

证 (a) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 200}{0.01n^2} = 0$, 所以,

当 n 充分大时, $0.01n^2$ 较 $100n + 200$ 大些.

(b) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{2^n} = 0^{**})$, 所以,

当 n 充分大时, 2^n 较 n^{1000} 大些.

(c) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0^{***})$, 所以,

当 n 充分大时, $n!$ 较 1000^n 大些.

*) 利用 60 题的结果.

**) 利用 61 题的结果.

68. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

证 因为 $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

*) 利用 10 题的结果.

69. 证明叙列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

是单调增加的, 且上方有界. 而叙列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} (n=1, 2, \dots)$$

是单调减少的, 且下方有界. 由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

证
$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} \\ &\quad + \dots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

其中每一项都为正, 当 n 增加时, 不但对应的项数增多, 而且每一个括弧内的数值也增大, 所以, 数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 单调增加.

又当 $k > 2$ 时, $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1, \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$, 所以,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3, \end{aligned}$$

此即数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 上方有界.

由此, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在, 以 e 表之.

其次, 由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

$$\text{即} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

$$\text{也即} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{所以,}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1} > y_n$, 因而, 数列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 单调减少. 又因

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

所以, 数列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 下方有界.

由此, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

70. 证明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

证 利用 69 题的结果知

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\text{即 } 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\text{而 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{3}{n},$$

因而 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{3}{n}.$

其次, 要 $e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 0.001$, 只要 $\frac{3}{n} \leq 0.001$, 即只要 $n \geq 3000$, 所以, 当指数 n 是代表任一不小于 3000 的自然数, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 与数 e 之差就小于 0.001.

71. 设 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 $q_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n} \right)^{q_n} = e.$$

证 令 $k_n = [p_n]$, 即 k_n 表 p_n 的整数部分, 则

$$k_n \leq p_n < k_n + 1.$$

由于 $p_n \rightarrow +\infty$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 从而显然 $\left(1 + \frac{1}{k_n} \right)^{k_n} \rightarrow e$

(参看 89 题题解). 由于

$$\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n + 1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n} \right)^{k_n + 1} > \left(1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n} > \left(1 + \frac{1}{k_n + 1} \right)^{k_n},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n} \right)^{k_n + 1} = e,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1} \right)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1} \right)^{k_n + 1}$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{k_n + 1} \right)^{-1} = e,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n} = e.$

其次, 若 $q_n \rightarrow -\infty$, 令 $q_n = -p_n$, 其中 $p_n \rightarrow +\infty$.

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right)^{p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n - 1}\right)^{p_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = e, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$

72. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并计算数 e 准确到 10^{-5} .

证 因为 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$

若固定 k , 且 $n > k$, 则有

$$\begin{aligned} x_n &> 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

今使 n 趋于无穷, 在上式两边取极限, 得

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 皆成立, 因此,

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e.$$

另一方面,有

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ 及 } x_n \rightarrow e,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

其次,设 $\omega_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则

$$\begin{aligned} 0 < \omega_{n+m} - \omega_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\} < \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{n-1}} \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

今让 n 固定不变,并让 m 趋于无穷,取极限,得

$$0 \leq e - \omega_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, 所以,

$$0 < e - \omega_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n},$$

即 $0 < e - \omega_n = \frac{\theta_n}{n! \cdot n}$, 其中 $0 < \theta_n < 1$,

$$\text{因而 } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n}. \quad (1)$$

下而将用公式(1)计算 e ,使之准确到 10^{-5} . 首先须确定怎

样选取 n , 才能实现这一准确度。取 $n=8$, 在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!} < 0.0000032,$$

所以弃去它时, 由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度, 因此, 取 $n=8$ 计算之。其次, 还须考虑计算每一项时的舍入误差, 为保证 e 准确到 10^{-5} , 我们在计算每一项时, 计算到第六位小数上四舍五入凑成整数, 则舍入误差总的

$$\text{不超过 } \frac{1}{2 \cdot 10^6} \times 6 = \frac{3}{10^6}, \text{ 于是总误差不超过}$$

$$6.2 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

列表:

	2.000000	
$\frac{1}{2!}$	= 0.500000	
$\frac{1}{3!}$	= 0.166667	(-)
$\frac{1}{4!}$	= 0.041667	(-)
$\frac{1}{5!}$	= 0.008333	(+)
$\frac{1}{6!}$	= 0.001389	(-)
$\frac{1}{7!}$	= 0.000198	(+)
$\frac{1}{8!}$	= 0.000025	
	<hr/>	
	2.718279	(-)

考虑到修正数的符号, 则总误差介于 $-\frac{2}{10^6}$ 和 $\frac{4}{10^6}$ 之间, 因而, 数 e 介于

2.718277 及 2.718283

之间,所以,

$$e=2.71828\pm 0.00001.$$

73. 证明数 e 为无理数.

证 假设 e 为有理数 $\frac{m}{n}$, 则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

在等式两端同乘以 $n!$, 我们即得出左端是整数, 而右端是整数加一真分数 $\frac{\theta_n}{n}$, 但这是矛盾的. 所以数 e 为无理数.

74. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)} \leq \frac{n}{2}$, 则 $\frac{1}{2}[\ln i + \ln(n-i)] \leq \ln \frac{n}{2}$.

从而 $\sum_{i=1}^{n-1} \ln i \leq (n-1) \ln \frac{n}{2}$, $(n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$.

两边同乘以 $\frac{n}{2}$, 得 $\frac{1}{2}n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n < e\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

设 $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n.$$

所以 (注意到 $x_1 = \frac{1}{e} < 1$)

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!.$$

从而证得 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

75. 证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 式中 n 为任意的自然数.

(6) $1 + a < e^a$, 式中 a 为异于零的实数.

证 (a) 因为 $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, 两边取对数, 得

$$0 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

又因为 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 两边取对数, 得

$$1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$.

因而 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(6) $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > 0, n$ 为正整数).

设 a 为正有理数: $a = \frac{p}{q}$, p, q 是正整数. 则由于 $e >$

$\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$, 故 $e^a > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{qa} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{q} = 1 + a$.

至于 a 为任意实数 ($\neq 0$) 时的证明见 1289 题 (a).

76. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \quad (a > 0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e = 2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a > 1$. 令 $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, 则 $b_n > 0$,

且 $\frac{\ln a}{n} = \ln(1 + b_n)$, 故

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)}.$$

由于 $b_n \rightarrow 0$, 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, $0 < b_n < 1$. 于是, 对每个 $n > N$, 存在唯一正整数 k_n , 使 $\frac{1}{k_n + 1} \leq b_n < \frac{1}{k_n}$.

由于 $b_n \rightarrow 0$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 由 75 题(a)知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n + 2} &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \leq \ln(1 + b_n) \\ &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{k_n + 1} = \frac{k_n}{k_n + 1} &< \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} < \frac{k_n + 2}{k_n} \\ &= 1 + \frac{2}{k_n}, \end{aligned}$$

由于 $k_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $\frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 由此得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a.$$

现设 $0 < a < 1$. 则 $\frac{1}{a} > 1$. 于是, 由上结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a^{\frac{1}{n}}) \cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$= -\ln \frac{1}{a} = \ln a.$$

当 $a=1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$ 显然成立, 故此式对任何 $a > 0$ 成立, 证毕.

利用关于单调而且有界的叙列的极限存在的定理, 证明以下各叙列的收敛性:

$$77. x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

式中 $p_i (i=0, 1, 2, \cdots)$ 是非负的整数, 从 p_1 起不大于 9.

证 $x_{n+1} = x_n + \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$, 由于 $p_{n+1} > 0$, 所以,

$$x_{n+1} > x_n,$$

因而, $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是单调增加的. 其次由于 $p_1 + \frac{1}{10} < x_n \leq 9 \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} \right) + p_0 < 1 + p_0$, 所以, 叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是有界的.

因而, 根据单调而且有界的叙列的极限存在的定理, 可知叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

解 当 $n \leq 10$ 时, 虽然 $\{x_n\}$ 单调增加; 但当 $n > 10$ 时, 由 $\frac{n+9}{2n-1} < 1$ 知叙列 $\{x_n\}$ 单调减少. 注意有下界 $x_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$. 因而, 叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 是单调

减少的.

又因 $0 < x_n < 1$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又因 $1 + a < e^a$, 所以,

$$0 < x_n < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdots e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} < e,$$

即数列是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cdots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \cdots.$$

证 数列 $\{x_n\}$ 显然是单调增加的.

其次, 利用数学归纳法可以证明: $x_n < \sqrt{2} + 1$. 事实上, 对于 $n=1$ 是成立的. 假设 $x_k < \sqrt{2} + 1$, 则

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1} \\ &< \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1, \end{aligned}$$

因而, 不等式对一切自然数均成立.

由此知数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

利用哥西判别法, 证明以下各数列的收敛性:

$$82. x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n,$$

其中 $|a_k| < M (k=0, 1, 2, \cdots)$ 且 $|q| < 1$.

$$\text{证 } |x_m - x_n| = |a_{n+1} q^{n+1} + \cdots + a_m q^m|$$

$$\begin{aligned} &\leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + \cdots + |a_m| \cdot |q|^m \\ &\leq M \cdot |q|^{n+1} (1 + |q| + \cdots + |q|^{m-n-1}) \\ &\leq M \cdot |q|^{n+1} \cdot \frac{1}{1-|q|} \quad (m > n). \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 由于 $|q|^{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$|q|^{n+1} < \frac{(1-|q|)\epsilon}{M}.$$

于是, 当 $m > n > N$ 时, 恒有

$$|x_m - x_n| < \epsilon.$$

由此可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad |x_m - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \quad (m > n). \end{aligned}$$

$$\text{任给 } \epsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right\rceil,$$

则当 $m > n > N$ 时, 必有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 从而 $|x_m - x_n| < \epsilon$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} - \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$

$$\text{证} \quad |x_m - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m!}{m(m+1)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \quad (m > n).
\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $m > n > N$ 时, 必有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$

证 $|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}, \quad (m > n).$

以下与 84 题证法步骤相同, 故知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

86. 若存在数 c , 使得

$$\begin{aligned}
&|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c \\
&\quad (n = 2, 3, \cdots),
\end{aligned}$$

则称数列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 有有界变差.

证明凡有有界变差的数列是收敛的.

举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|$
 $(n = 2, 3, \cdots),$

则数列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界, 所以它是收敛的.

根据哥西收敛准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 N , 使

$$\text{当 } m > n > N \text{ 时, } |y_m - y_n| < \varepsilon,$$

$$\text{即 } |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

而对于数列 $\{x_n\}$ 有

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
& + |x_{m+1} - x_m| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots \\
& + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以, 数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

数列: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, (-1)\frac{1}{n}, \dots$,
 它是以零为极限的收敛数列. 但它不是有有界变差的. 事实上,

$$\begin{aligned}
& |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \cdots \\
& + |x_{2n} - x_{2n-1}| > |x_2 - x_1| + |x_4 - x_3| + \cdots \\
& + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\
& = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right),
\end{aligned}$$

而数列 $\omega_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的^{*}, 又是递增的, 故 $\omega_n \rightarrow +\infty$. 于是,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}|$$

不是有界的, 因而, 收敛数列 $\{x_n\}: 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ 无有界变差.

*) 详见 88 题的证明.

87. 试叙述“某数列不满足哥西准则”的意义.

解 即存在某一个 $\varepsilon_0 > 0$, 不论对于怎样的数 N , 总有 $n_0 > N, m_0 > N$, 使得

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

88. 利用哥西判别法, 证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m=2n$, 则

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以, 数列 $\{x_n\}$ 发散.

89. 证明若数列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 收敛, 则它的任何子数列 x_{p_k} 也收敛, 且有同一极限:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有正整数 N , 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon.$$

今因自然数数列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限, 所以, 对于 N , 存在有正整数 k_0 , 使

$$\text{当 } k > k_0 \text{ 时, } p_k > N,$$

此时 $|x_{p_k} - a| < \varepsilon (k > k_0)$, 所以, 子数列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

90. 证明: 若单调数列的某一子数列收敛, 则此单调数列本身是收敛的.

证 不失一般性, 假设数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 其一子数列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛于 a . 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使

$$\text{当 } k > N \text{ 时, } |x_{p_k} - a| < \varepsilon,$$

令 $N' = p_{N+1}$. 设 $n > N'$, 由于 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots \rightarrow +\infty$, 故必有 $p_k (k > N)$ 使 $p_k \leq n < p_{k+1}$. 由上知

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon, |x_{p_{k+1}} - a| < \varepsilon.$$

而 $x_{p_k} \leq x_n \leq x_{p_{k-1}}$ (因 x_n 递增), 故必

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即 $\{x_n\}$ 是收敛的.

91. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有数 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$. 又因 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 故当 $n > N$ 时, $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

92. 设 $x_n \rightarrow a$, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

解 按题意, 应设 $x_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$.

若 $a \neq 0$, 则显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在, 例如, 若 $\{x_n\}$ 为:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

则 $x_n \rightarrow 0$, 但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \rightarrow 1, \frac{x_{2m+1}}{x_{2m}} \rightarrow \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存

在. 下面我们证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 设为 b , 则必有 $-1 \leq$

$b \leq 1$.

用反证法. 若 $|b| > 1$. 取 r , 使 $|b| > r > 1$. 利用 91 题结果, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|.$$

于是, 存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$. 从而, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left| \frac{x_{N+1}}{x_N} \right| \cdot \left| \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \right| \cdots \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 此与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 矛盾, 故必有 $-1 \leq b \leq 1$.

总结起来, 若 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; 若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于 $[-1, 1]$.

93. 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 要证 $\{x_n\}$ 有界. 对于正数 $\epsilon = 1$, 存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 必有 $|x_n - a| < 1$, 从而 $|x_n| < |a| + 1 (n > N)$. 于是, 令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则 $|x_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$. 由此可知 $\{x_n\}$ 有界.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则或存在某 $x_i > A$, 或存在某 $x_j < A$, 或这种 x_i, x_j 都存在. 作 A 的充分小的邻域使它不包含 x_i 或 x_j , 或 x_i, x_j 都不包含在此邻域内. 由于 $x_n \rightarrow A$, 故在这三种情况的任一种下, 这个邻域外部都只有 $\{x_n\}$ 中的有限个元素. 因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到. 在第一种情形下确界可能达到, 也可能达不到; 在第二种情形, 上确界可能达到也可能达不到.

95. 证明趋近于 $+\infty$ 的数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 必定达到其下确界.

证 由题设可知存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时恒有 $x_n > x_1$, 于是, 显然, x_1, x_2, \dots, x_N 中的最小者即为 $\{x_n\}$ 的下确界.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最大项, 设:

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}.$

解 当 $n = 3$ 时, $n^2 > 2^n$; 当 $n \neq 3$ 时, $n^2 \leq 2^n$;

所以, 最大项为 $x_3 = \frac{9}{8}.$

97. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}.$

解 $x_n = \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 + 20} \leq \frac{1}{20}$, 其中 $x_{100} = \frac{1}{20}$,

所以, 最大项为 $x_{100} = \frac{1}{20}.$

98. $x_n = \frac{1000^n}{n!}.$

解 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}.$

当 $n+1 < 1000$ 时, $x_{n+1} > x_n$;

当 $n+1 > 1000$ 时, $x_{n+1} < x_n$.

所以, 最大项为 $x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最小项, 若:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$.

解 若 $n^2 - 9n \geq 0$, 则 $n \geq 9$;

若 $n^2 - 9n < 0$, 则 $0 < n < 9$.

所以, 最小项从 x_1 到 x_8 中寻找, 比较之, 得 x_n 的最小项为

$$x_4 = x_5 = -20 - 100 = -120.$$

100. $x_n = n + \frac{100}{n}$.

解 $x_n = \left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}} \right)^2 + 20 \geq 20$, 其中 $x_{10} = 20$,

所以, 最小项为 $x_{10} = 20$.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = 1$;

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

解 $\inf\{x_n\} = -1$; $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$;

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1;$$

$$103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

解 $x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{2}{3}, x_3 = 1, x_4 = 1 + \frac{4}{5}, \dots$

$$\inf\{x_n\} = 0; \quad \sup\{x_n\} = 2;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

$$104. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

解 $x_{4k} = 1 - 2 + 3, x_{4k+1} = 1 + 2 + 3,$

$$x_{4k+2} = 1 - 2 - 3, x_{4k+3} = 1 + 2 - 3 (k = 0, 1, 2,$$

$\dots).$

$$\inf\{x_n\} = -4; \quad \sup\{x_n\} = 6;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 6.$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

解 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), x_3 = \frac{1}{2},$

$$x_4 = \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{2} \right), x_5 = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), x_6 = \frac{5}{7},$$

$$x_7 = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \right), x_8 = \frac{7}{9} \left(-\frac{1}{2} \right), x_9 = \frac{4}{5}, \dots,$$

$$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}; \quad \sup\{x_n\} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$106. x_n = (-1)^n n.$$

解 $\inf\{x_n\} = -\infty; \quad \sup\{x_n\} = +\infty;$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

$$107. x_n = -n[2 + (-1)^n].$$

解 $\inf\{x_n\} = -\infty; \quad \sup\{x_n\} = -1;$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

108. $x_n = n(-1)^n.$

解 $\inf\{x_n\} = 0; \quad \sup\{x_n\} = +\infty;$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

109. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$

解 $x_1 = 1 + 1, x_2 = 1 + 0, x_3 = 1 - 3, x_4 = 1 + 0,$
 $x_5 = 1 + 5, \dots.$

$$\inf\{x_n\} = -\infty; \quad \sup\{x_n\} = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

110. $x_n = \frac{1}{n - 10.2}.$

解 当 n 由 1 到 10 时, x_n 由负数往下降;

当 n 由 11 到 $+\infty$ 时, x_n 由正数往下降, 所以,

$$\inf\{x_n\} = x_{10} = -5; \quad \sup\{x_n\} = x_{11} = 1.25;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$. 设:

111. $x_n = \frac{n^2}{1 + n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}.$

解 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{1}{2}; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$

112. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$

解 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = e + 1.$

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

$$114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ (因 $(2^{2k} + 1)^{\frac{1}{2k}}$
 $= 2 \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} \right)^{\frac{1}{2k}} \rightarrow 2$).

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

求下列各叙列的聚点:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots.$$

解 聚点为 0 及 1.

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots,$$

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots.$$

解 聚点为

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots.$$

它们分别为子叙列:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}, \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right\}, \dots \text{ 的极限.}$$

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots.$$

解 所述数列正好包含 $(0, 1)$ 中全部有理数, 故对于闭

区间 $[0, 1]$ 上的每一点 x ,在其任意的 ε 邻域内均有此数列中无穷个数,因此 x 必可作为某子数列的极限,所以, x 是所述数列的聚点,由此可知 $[0, 1]$ 中的任何点都是所述数列的聚点,显然, $[0, 1]$ 外的点都不是所述数列的聚点.

119. $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

解 因为 $2 \cdot (-1)^n$ 为2或-2.所以,聚点为5及1.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b) + (-1)^n(a-b)]$.

解 聚点为 a 及 b .

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \dots, a_p - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3},$$

$$a_2 - \frac{1}{3}, \dots, a_p - \frac{1}{3}, \dots, a_1 - \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}, \dots,$$

$$a_p - \frac{1}{n}, \dots$$

显然以 a_1, a_2, \dots, a_p 为聚点.

122. 试举出数列的例子,对此数列而言,已知数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

所有各项皆为其聚点,已知数列还必有怎样的聚点?

解 例如,数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3 + \frac{1}{3},$$

$$a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4 + \frac{1}{4}, \dots,$$

$$a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, a_3 + \frac{1}{n}, \dots, a_n + \frac{1}{n}, \dots$$

就以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 为其聚点.

另外,很明显,若 $\{x_n\}$ 为一数列,使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 a_1, a_2, a_3, \dots 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点,则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

123. 举出叙列的例子:

- (a) 没有有限的聚点;
- (b) 有唯一有限的聚点,但非收敛者;
- (c) 有无限多的聚点;
- (r) 以每一实数作为聚点.

解 (a) 叙列 $x_n = n (n = 1, 2, \dots)$ 没有有限的聚点.

(b) 叙列: $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \dots, \frac{1}{n}, -n, \dots$ 有唯一有限的聚点 0,但此叙列却不收敛.

(c) 118 题的叙列即有无限多的聚点.

(r) 我们按下述“对角线法则”来构造一个叙列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1.1.

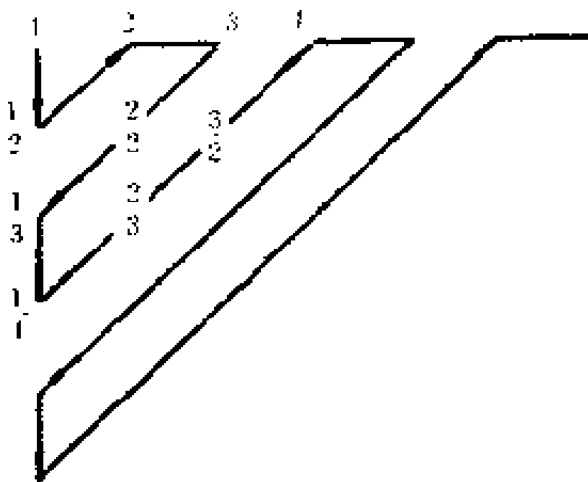


图 1.1

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = 2, \\ x_6 = -2, x_7 = 3, x_8 = -3, x_9 = \frac{2}{2}, \\ x_{10} = -\frac{2}{2}, x_{11} = \frac{1}{3}, x_{12} = -\frac{1}{3}, \dots$$

此叙列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为 $(-\infty, +\infty)$.

124. 证明叙列 x_n 和 $y_n = x_n \cdot \sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有相同的聚点.

证 因为 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_{n_k}\}$ 的对应子叙列 $\{x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}\}$ 同时收敛, 且具有相同的极限, 此即叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的聚点.

125. 证明从有界的叙列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 中, 永远可选出收敛的子叙列 x_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$).

证 因为叙列 $\{x_n\}$ 有界, 故可设一切项满足不等式

$$a \leq x_n \leq b,$$

其中 a, b 为有限的实数, 将区间 $[a, b]$ 二等分之, 得区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项, 将它记成 $[a_1, b_1]$ (若两者均含无穷多项, 则任取其一作为 $[a_1, b_1]$). 再将区间 $[a_1, b_1]$ 等分之, 又可得区间 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 它包含所给叙列的无限多项. 依次类推, 于是得一串区间:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

其中每一 $[a_n, b_n]$ 都包含所给叙列 $\{x_n\}$ 中的无限多项,

且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

因此, 根据区间套定理诸 $[a_n, b_n]$ 具有唯一的公共点 c , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

现按下法选出 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{p_k}\}$: 在包含于 $[a_1, b_1]$ 内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1} . 然后, 在包含于 $[a_2, b_2]$ 内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2} , 然后, 又在包含于 $[a_3, b_3]$ 内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3} . 余类推 (这是可能的, 因为每个 $[a_k, b_k]$ 中都包含有 x_n 无穷多项). 于是我们得出 $\{x_n\}$ 的一子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

由此, 知 $|x_{p_k} - c| \leq b_k - a_k \quad (k = 1, 2, \dots)$,

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c$. 从而 $\{x_{p_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛于数列. 证毕.

126. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 则存在子数列 $x_{p_n} (n = 1, 2, \dots)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty.$$

证 因 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 故存在某项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}| > 1$. 由于数列 $x_n (n = p_1 + 1, p_1 + 2, \dots)$ 也无界, 故又存在某项 $x_{p_2} (p_2 > p_1)$, 使 $|x_{p_2}| > 2$; 又由于数列 $x_n (n = p_2 + 1, p_2 + 2, \dots)$ 无界, 故又存在某项 $x_{p_3} (p_3 > p_2)$, 使 $|x_{p_3}| > 3$. 余类推. 于是, 我们得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$|x_{p_k}| > k (p = 1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty,$$

证毕.

127. 设数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛, 而数列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 发散, 则能否断定关于数列

$$(a) x_n + y_n; (b) x_n y_n$$

的收敛性?

举出适当的例子.

解 (a) $\{x_n + y_n\}$ 一定发散. 如果 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 则由 $(x_n + y_n) - x_n = y_n$, 知 $\{y_n\}$ 收敛, 与题设矛盾.

(b) 数列 $\{x_n y_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例如:

$$(1) \text{ 数列 } x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots) \text{ 收敛,}$$

$$\text{数列 } y_n = n (n = 1, 2, \dots) \text{ 发散,}$$

$$\text{而数列 } x_n y_n = 1 (n = 1, 2, \dots) \text{ 是收敛的.}$$

$$(2) \text{ 数列 } x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots) \text{ 收敛,}$$

$$\text{数列 } y_n = n^2 (n = 1, 2, \dots) \text{ 发散,}$$

$$\text{而数列 } x_n y_n = n (n = 1, 2, \dots) \text{ 却是发散的.}$$

128. 设数列 x_n 和 y_n 发散 ($n = 1, 2, \dots$). 可否断定数列

$$(a) x_n + y_n; (b) x_n y_n.$$

也发散呢?

举出适当的例子.

解 不能. 例如, 数列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1, 2, \dots)$$

都发散,但叙列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

及

$$x_n y_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

却都是收敛的,

129. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

及 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 为任意叙列,能否断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

及

$$y_n = n (n = 1, 2, \dots)$$

的乘积

$$x_n y_n = 1 (n = 1, 2, \dots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 1,不趋于 0.

130. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1, 2, \dots),$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

当然,还可举例 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n, (n = 1, 2, \dots)$, 则 $x_n y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$, 而 $\{y_n\}$ 极限不存在(当 $n \rightarrow \infty$). 注意,假若已知 $x_n y_n \rightarrow 0$, 而又已知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 中至少有一个数列有极限的话, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 至少有一个是成立的.

131. 证明

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 对于序列 $\{y_n\}$, 必有子序列 $y_{n_{k_1}} \rightarrow \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_1}}$. 显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 由于 $x_{n_{k_1}} + y_{n_{k_1}} \rightarrow a + \beta$, 故 $a + \beta$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点.

由此可知

$$a + \beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq a + \beta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式, 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow a' = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$.

对于序列 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_1}}\}$ 使 $x_{n_{k_1}} \rightarrow \beta' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_1}}$, 显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_1}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha' - \beta'.$$

故 $\alpha' - \beta'$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点,从而

$$\alpha' - \beta' \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha' \geq \beta' + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(6) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 显然

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow r - \tau,$$

故 $r - \tau$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点,从而

$$r - \tau \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = r \leq \tau + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_i}\}$, 使 $y_{n_i} \rightarrow r' = \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n$. 对于序列 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau' = \varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 显然 $\varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow r' + \tau',$$

故 $r' + \tau'$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点,从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau'.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + r' \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如, 令

$\{x_n\}$ 为: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$.

则有不等式

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= 0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 1 \\ &< \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 2. \end{aligned}$$

而对于数列

$\{x_n\}$ 为: $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$,

则有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= 1 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 2 \\ &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 3. \end{aligned}$$

132. 设 $x_n \geq 0$ 和 $y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$.

证明:

$$(a) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端的不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$; 对于序列 $\{y_n\}$, 存在于序列 $\{y_{n_{k_i}}\}$, 使 $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0$. 显然 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$. 由于 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha\beta$, 故 $\alpha\beta$ 是序列 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点, 因此

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta$$

由此, 再注意到 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 即得知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta \leq \alpha(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则此不等式显然成立, 故设 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$. 于是, 存在正整数 N_0 , 使当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0$. 根据定义, 存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) \geq 0.$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$, 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}.$$

注意到 $\beta' = \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$ 以及 $x_n > 0 (n > N_0)$,

知

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故 $\frac{\alpha'}{\beta'}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha' \geq \beta' (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \geq (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(6) 先证右端不等式, 可设 $\{y_n\}$ 有界 (若 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 从而此不等式显然成立)。根据定义, 存在 $\{x_n, y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}, y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} \rightarrow \bar{\beta} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0.$$

若 $\bar{\beta} = 0$, 则由于 $\{y_n\}$ 有界, 知 $x_{n_k} y_{n_k} > 0$, 从而 $\bar{a} = 0$, 此时所要证的不等式显然成立, 故下设 $\bar{\beta} > 0$. 于是, 当 i 充分大时 ($i > i_0$), $x_{n_{k_i}} > 0$, 故得

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{\beta}}.$$

因此, $\frac{\bar{a}}{\bar{\beta}}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而 $\frac{\bar{a}}{\bar{\beta}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$; 由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \bar{a} \leq \bar{\beta} (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一子序列 $\{y_{n_k}\}$, 使 $y_{n_k} \rightarrow r = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0$, 对于 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0.$$

显然, $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \tau r,$$

故 τr 是 $\{x_n y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\tau r \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

由此可知

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq rr \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子,例如,令

$$\{x_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

$$\{y_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{8} < \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= \frac{1}{2} < (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 1. \end{aligned}$$

再令

$$\{x_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\{y_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{2} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= 1 < (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 4. \end{aligned}$$

133. 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,则对任何的叙列 $y_n (n=1, 2, \dots)$,有

$$(a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

及

$$(6) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n (x_n \geq 0).$$

证 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

从而,利用 131 题的结果可知

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\
&= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),
\end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(6) 分三种情形: (i) 设 $y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$. 则利用 132 题的结果可知

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &\leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \\
&= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \\
&= (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),
\end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(ii) 设 $y_n \leq 0 (n = 1, 2, \dots)$. 则 $-y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 于是, 仍利用 132 题的结果可知

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \\
&= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\
&= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n),
\end{aligned}$$

故得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n),$$

但是根据上、下极限的定义, 显然有等式

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \\
\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,
\end{aligned}$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(iii) 设 $\{y_n\}$ 中有无穷多项是非负的, 设这些项构成的子序列为 $\{y_{n_k}\} (y_{n_k} \geq 0, k = 1, 2, \dots)$ (如果 $\{y_n\}$ 中只有有限项是非负的, 则从某一项开始有 $y_n < 0$, 这时应用(ii)的结果即知所要证的等式成立). 于是, 注意到 $x_n \geq 0$, 显然有(利用(i)已证的结果)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{aligned}$$

证毕.

134. 证明: 若对于某非负^{*} 叙列 $x_n (x_n \geq 0, n = 1, 2, \dots)$, 任何叙列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 都使下二等式中至少有一成立:

$$(a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

或

$$(b) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则叙列 x_n 是收敛的.

证 取 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} \rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

取

$$y_n = \begin{cases} -x_n, & \text{当 } n \neq n_k \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } n = n_k \text{ 时,} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

其中 A 为任取的正常数, 对此 $\{y_n\}$ 若(a)成立, 则由(注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A,$$

知

$$(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A,$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

若 (σ) 成立, 则由 (同样, 注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

知

$$A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 也是收敛的. 证毕.

*) 编者注: 原著中将 $x_n \geq 0$ 的假定加在条件 (6) 后, 似不妥, 因为数列 x_n 应该是预先给定的.

135. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

则数列 x_n 是收敛的.

证 由假定知

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} < +\infty. (*)$$

由于 (利用 132 题的结果)

$$1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n})$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) = 1,$$

故

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}) = 1,$$

从而

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}).$$

由此,再注意到(*)式,即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - a \quad (0 < a < +\infty).$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在有限,因此 $\{x_n\}$ 收敛,证毕.

136. 证明:若叙列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有界,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间,即是说间隔 $[l, L]$ 中的任意一个数都是已知叙列的聚点.

证 根据定义, l 与 L 都是 $\{x_n\}$ 的聚点,故我们只要证明 l 与 L 之间的任何数 $a (l < a < L)$ 都是 $\{x_n\}$ 的聚点. 先证:对于任意给定的 $\epsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N ,必有正整数 $n' > N$ 存在,使 $|x_{n'} - a| < \epsilon$.

由假定,必有正整数 N' 存在,使当 $n > N'$ 时,恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. 令 $N_0 = \max\{N, N'\}$, 则于序列 $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots)$ 中必至少有两项 $x_{n'}$ 和 $x_{n''}$ 存在,使 $x_{n'} < a, x_{n''} > a$ (因为否则的话,例如,无小于 a 的项,则必 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$, 此与 $l < a$ 矛盾), 不妨设 $n' < n''$, 令

满足 $n' \leq n \leq n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 n^* . 显然 $n^* \leq n'' - 1$, 且 $x_{n^*} < a, x_{n^*+1} > a$. 故 $n^* > N$, $n^* > N'$ 并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1, N_1 = 1$, 则存在 $x_{n_1} (n_1 > 1)$, 使 $|x_{n_1} - a| < 1$; 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, N_2 = n_1$, 则存在 $x_{n_2} (n_2 > n_1)$ 使 $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, N_3 = n_2$, 存在则 $x_{n_3} (n_3 > n_2)$ 使 $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$; 这样一直继续下去, 则得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

故 $x_{n_k} \rightarrow a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 证毕.

137. 设数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 证法一:

由于

$$x_n \leq x_{n-1} + x_1 \leq x_{n-2} + x_1 + x_1 \leq \dots \leq nx_1,$$

故 $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$, 从而数列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 有界, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a$, 则 0

$\leq a \leq x_1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$ 使 $\frac{x_N}{N} < a + \varepsilon$.

任何正整数 $n > N$ 都可表为 $n = qN + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为小于 N 的非负整数 ($0 \leq r < N$).

我们有

$$\begin{aligned}x_n = x_{qN+r} &\leq x_{(q-1)N} + x_N + x_r \leq x_{(q-2)N} + x_N + \\&+ x_N + x_r \leq \cdots \leq qx_N + x_r \leq qx_N + rx_1 \\&\leq qx_N + Nx_1,\end{aligned}$$

从而

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leq \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + \varepsilon + \frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a + \varepsilon,$$

再根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n},$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在有限.

证法二:

用反证法. 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 不存在, 则序列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 至少有两个聚点 a 与 b , 不妨设 $a < b$, 由于 (证法一中已证)

$$0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故 $0 \leq a < b \leq x_1$. 根据聚点定义, 存在 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{x_{m_j}\}$, 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给 $\epsilon < 0$, 必存在正整数 $i_0 > 1$, 使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \epsilon.$$

显然, 当 j 充分大时 ($j > j_0$), 必 $m_j > n_{i_0}$, 此时仿证法一, 有不等式 ($[x]$ 表 x 的整数部分)

$$x_{m_j} \leq \left[\frac{m_j}{n_{i_0}} \right] x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1 \leq \frac{m_j}{n_{i_0}} x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1,$$

故 ($j > j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leq \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j} < a + \epsilon + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j},$$

由此可知

$$b = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} \leq a + \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即得 $b \leq a$, 此与 $a < b$ 矛盾, 证毕.

138. 证明: 若叙列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛, 则算术平均值的叙列

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

反之, 则结论不真, 举例说明之.

证 令 $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{n} &= \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设收敛于 a , 则对于任给的 $\epsilon > 0$ 存在序

号 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 x_{N+1}, x_{N+2}, \dots 均 $\in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 由此推得 $\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N}$ 也含在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之内, 即

$$\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} = a + \alpha,$$

式中 $|\alpha| < \varepsilon$.

这样, $\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a + \alpha)(1 - \frac{N}{n})$. 由此得

$$\left| \frac{s_n}{n} - a \right| \leq \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + (|a| + |\alpha|) \frac{N}{n}.$$

今取 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \varepsilon, \quad \frac{N}{n} < \frac{\varepsilon}{|a| + \varepsilon}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时, 恒有 $\left| \frac{s_n}{n} - a \right| < 3\varepsilon$.

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = a,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

但反之不然, 例如叙列 $x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 是发散的, 但是叙列

$$\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

却是收敛的.

139. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 故对于任给的 $M > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, $x_n > 3M$. 此时, 仿 138 题之证, 有

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right) > \frac{s_N}{n} + 3M \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

又因 $\frac{s_N}{n} \rightarrow 0, 1 - \frac{N}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 故可取正整数 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \frac{M}{2}, \quad 1 - \frac{N}{n} > \frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时恒有 $\frac{s_n}{n} > M$, 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 且 $x_n > 0$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 因 $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 故 $a \geq 0$. 先设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$, 于是, 利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) = \ln a.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} \\ &= e^{\ln a} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$. 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n) = +\infty,$$

由此可知

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n)} \\ &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.\end{aligned}$$

证毕.

141. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $y_n > 0$. 由假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 设为 a . 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = a.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \left[(y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ &= 1 \cdot a = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.\end{aligned}$$

142. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

证 设数列 $x_n = \frac{n^n}{n!} (n = 1, 2, \cdots)$ 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

所以, 利用 141 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

143. 证明:若

$$(a) y_{n+1} > y_n (n = 1, 2, \dots),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \text{ 存在,}$$

$$\text{则} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$. 由此, 并注意到 $y_n \rightarrow +\infty$,

知对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (且 } y_n > 0 \text{)}.$$

于是分数(当 $n > N$ 时)

$$\frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \frac{x_{N+3} - x_{N+2}}{y_{N+3} - y_{N+2}}, \dots,$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

都包含在 $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ 之内, 因为 $y_{n+1} > y_n$, 所以, 这些分数的分母都是正数, 于是得

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1}$$

$$< (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}),$$

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2}$$

$$< (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}),$$

.....

$$\begin{aligned} (a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) &< x_{n+1} - x_n \\ &< (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n), \end{aligned}$$

相加之,得

$$\begin{aligned} (a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}) &< x_{n+1} - x_{N+1} \\ &< (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}), \end{aligned}$$

$$\text{即 } a - \frac{\epsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} < a + \frac{\epsilon}{2},$$

所以,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

另外,我们有(当 $n > N$ 时)

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - a &= \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} + (1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}) \\ &\quad \cdot \left(\frac{x_n - x_{N+1}}{y_n - y_{N+1}} - a \right), \end{aligned}$$

故

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} \right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

现取正整数 $N' > N$,使当 $n > N'$ 时,恒有

$$\frac{|x_{N+1} - ay_{N+1}|}{y_n} < \frac{\epsilon}{2}$$

于是,当 $n > N'$ 时,恒有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \epsilon.$$

由此可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$

注. 本题中, 若将条件(B) 换为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}$$

则结论仍成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

144. 求 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} (a > 1)$;

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n}.$

解 (a) 设 $x_n = n^2, y_n = a^n (a > 1)$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n = 2n+1, y'_n = a^n$,

则 $y'_{n+1} > y'_n, y'_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \rightarrow 0,$$

因而利用 143 题的结果得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n} = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$

继续利用 143 题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$

(6) 设 $x_n = \lg n, y_n = n$,

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$.

注 143 题的结果属于 O. Stolz, 当 $y_n = n$ 时, 早已被 A.

L. Cauchy 所证明, 此结果常用于确定 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定式

$\frac{x_n}{y_n}$ 的极限, 144 题即是一例. 应用此结果, 也可证明 138

题及 139 题的结果 (此结果属于哥西 Cauchy). 事实上,

令

$$x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, y'_n = n,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{y'_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

145. 证明: 若 p 为自然数, 则

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

证 (a) 令 $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, y_n = n^{p+1}$,

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p} + \cdots$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{p+1},$$

式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 为无穷小, 以下不再说明,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

$$(6) \text{ 令 } x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1},$$

$$y_n = (p+1)n^p,$$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1} + \cdots}{p(p+1)n^{p-1} + \cdots}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \text{ 令 } x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p, y_n = n^{p+1},$$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1}, \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

$$= \frac{2^p}{p+1}.$$

146. 证明: 叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

收敛.

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n.$$

式中 $C = 0.577216 \cdots$ 称为尤拉常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

证 因为 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

故 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

令 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 得出

$$\ln 2 - \ln 1 < 1,$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3},$$

.....

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

相加之得

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

于是,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \\ &> \frac{1}{n+1} > 0, \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是一个有下界的数列, 其次,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ^{*)}, 所以 $x_n - x_{n+1} > 0$, 这就是说, $\{x_n\}$ 又是一个单调下降的数列. 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 用 C 表示之, 即

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

*) 及 **) 利用 75 题(a)的结果.

147. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

解 因为

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}, \quad (2)$$

其中 C 为尤拉常数, $\varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_{2n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

(2)式减(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \ln 2n - \ln n + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \\ &= \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

148. 数列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是由下列各式

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} (n=3, 4, \cdots)$$

所确定. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

解 由于

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} \\ &= \cdots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{m=1}^n (x_{m+1} - x_m) + x_1 \\ &= (b-a) \sum_{m=1}^n \frac{1}{(-2)^{m-1}} + a, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b-a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + a = \frac{a+2b}{3}.$$

149. 设 $a > 0$ 和 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 为由以下各式

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) (n=0, 1, 2, \cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

证 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_n} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right)^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$
 $(n=0, 1, 2, \dots),$

则 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} - x_n \right) \leq 0.$

知 $\{x_n\}$ 为单调下降的有界数列, 必有极限存在. 设其极限为 l , 则 $l \geq \sqrt{a} > 0$, 对于等式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

两端取极限, 即得

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right),$$

解之得

$$l = \sqrt{a} \text{ (负值不合适),}$$

故证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

150. 证明由下列各式

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 有公共的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术—几何平均数).

证 分两种情形:

1) a 与 b 中至少有一个为零, 例如, 设 $a=0$. 则显然有 $x_n = 0 (n=1, 2, \dots), y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$, 从而, 递推得

$$y_n = \frac{b}{2^{n-1}} (n=1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2) 设 $a \neq 0, b \neq 0$. 这时, 必须 $a > 0, b > 0$. 否则, 若 $ab < 0$, 则 $x_2 = ab$ 没有意义; 若 $a < 0, b < 0$, 则 $x_2 = \sqrt{ab} > 0, y_2 = \frac{a+b}{2} < 0$, 从而 $x_3 = \sqrt{x_2 y_2}$ 没有意义. 因此, 必须 $a > 0, b > 0$. 不妨假定 $a \leq b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项, 并且都界于原来两数之间, 故有

$$a \leq x_2 \leq y_2 \leq b,$$

由此又有

$$a \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq b.$$

应用数学归纳法可知 一般有

$$a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b \quad (n=2, 3, \dots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列, $\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列, 因此它们的极限都存在, 令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

在等式

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

两端取极限, 得

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

故 $\alpha = \beta$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

§ 3. 函数的概念

1° 函数的概念 若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f , 并记为 $y = f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域, 在最简单的情形下, 集合 X 或为开区间 $(a, b): a < x < b$, 或为半开区间 $(a, b]: a < x \leq b$ 或 $[a, b): a \leq x < b$, 或为闭区间 (线段 $[a, b]: a \leq x \leq b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$).

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数.

2° 反函数 若把 x 了解为满足方程式

$$f(x) = y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值)的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数, 这个函数一般地说来是多值的. 若函数 $y = f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$], 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单调函数.

求下列函数的存在域:

151. $y = \frac{x^2}{1+x}.$

解 当 $1+x \neq 0$, 即 $x \neq -1$ 时, 函数 y 才有意义, 所以, 它的存在域为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

152. $y = \sqrt{3x-x^3}.$

解 存在域为满足不等式

$$3x - 3x^3 \geq 0$$

的实数 x 的集合, 解之, 得存在域为 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$.

$$153. y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

解 当 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 时, y 值确定.

解之, 得存在域为满足

$$-1 \leq x < 1$$

的数 x 的集合.

$$154. (a) y = \log(x^2 - 4), (b) y = \log(x+2) + \log(x-2).$$

解 (a) 当 $x^2 - 4 > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$.

(b) 函数 y 由两个函数组成, 其中第一个函数的存在域为 $(-2, +\infty)$, 而第二个函数的存在域为 $(2, +\infty)$, 于是, 函数 y 的存在域为它们的公共部分, 即 $(2, +\infty)$.

$$155. y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}.$$

解 当 $\sin \sqrt{x} \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数. 解之, 得

$$2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

存在域为满足不等式

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

$$156. y = \sqrt{\cos x^2}.$$

解 当 $\cos x^2 \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数, 即只要 x 满足

$$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ (k=1, 2, \dots).$$

解之,得存在域为满足不等式

$$|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ 及 } \sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}} \\ (k=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

157. $y = \log \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$

解 当 $\sin \frac{\pi}{x} > 0$ 时, y 值确定, 即只要

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

及

$$-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi.$$

所以, 存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

及

$$-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

158. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$

解 当 $x \geq 0$ 及 $\sin \pi x \neq 0$ 时, y 值确定, 解之, 得存在域为满足关系式

$$x > 0, x \neq n (n=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

159. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1,$$

$$-1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1,$$

$$-3 \leq -\frac{2}{1+x} \leq -1,$$

$$\frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2.$$

最后得存在域为满足不等式

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

的数 x 的集合.

160. $y = \arccos(2\sin x).$

解 当 $|2\sin x| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得
存在域为满足不等式

$$|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)].$

解 当 $\cos(\lg x) > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < \lg x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

从而存在域为满足不等式

$$10^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

162. $y = (x - |x|) \sqrt{-\sin^2 \pi x}.$

解 由于 $\sin^2 \pi x \geq 0$, 故仅当 $\sin \pi x = 0$ 时 $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 才有

意义,从而函数 y 才有意义. 解之,得存在域为

$$x=k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

163. $y=\operatorname{ctg} \pi x+\arccos (2^x)$.

解 当 $\sin \pi x \neq 0$ 时,第一项有意义,即 $x \neq k(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 $0 \leq 2^x \leq 1$ 时,第二项有意义,即 $x \leq 0$. 由此得存在域为满足关系式

$$x < 0, x \neq -n \quad (n=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合。

164. $y=\arcsin (1-x)+\lg (\lg x)$.

解 当 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 时,第一个函数有意义;

当 $\lg x > 0$, 即 $x > 1$ 时,第二个函数有意义.

由此得存在域为满足不等式

$$1 < x \leq 2$$

的数 x 的集合。

165. $y=(2x)_1$.

解 当 $2x=n(n=0, 1, \dots)$ 时, y 值确定,所以,存在域为集合:

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \dots$$

求下列函数的存在域和函数值域:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2 \geq 0$ 时, y 值确定. 解之,得存在域为满足不等式

$$-1 \leq x \leq 2$$

的数 x 的集合. 又因

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$0 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

的数 y 的集合.

167. $y = \lg(1 - 2\cos x).$

解 当 $1 - 2\cos x > 0$ 时, y 值确定, 解之, 得存在域为满足不等式

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

的数 x 的集合 A . 因为

$$\max_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3,$$

$$\inf_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 0,$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$-\infty < y \leq \lg 3$$

的数 y 的集合.

168. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ 时, y 值确定, 而对于 $-\infty < x < +\infty$ 来说, 始终有 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 所以, 存在域为全体实数组成的集合, 而函数值域为闭区间 $[0, \pi]$.

169. $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right).$

解 当 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$ 时, 即当 $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$, 或 $1 \leq x \leq 100$ 时, y 值确定, 且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变化, 所以, 存在域为闭区间 $[1, 100]$, 函数值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

170. $y = (-1)^x$.

解 存在域为数 $x: x = \frac{p}{2q+1}$ (p, q 为整数) 的集合, 而函数值域为: $y = (-1)^p$, 即由 $-1, 1$ 两数组成的集合.

171. 在底为 $AC = b$ 和高为 $BD = h$ 的三角形 ABC 中(图 1.2) 内接一个高为 $NM = x$ 的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表为 x 之函数.

作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图形.

解 因为 $\frac{LM}{b} = \frac{h-x}{h}$,
所以,

$$LM = b \left(1 - \frac{x}{h} \right).$$

周长 $P = 2LM + 2x$, 即

$$P = P(x) = 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) x + 2b,$$

式中 $0 < x < h$.

当 $b < h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AB 所示(不包含 A, B 两点).

当 $b > h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AC 所示(不包含 A, C 两点). 其中 $OA = 2b$, B 和 C 的坐标为 h 和 $2h$.

矩形面积

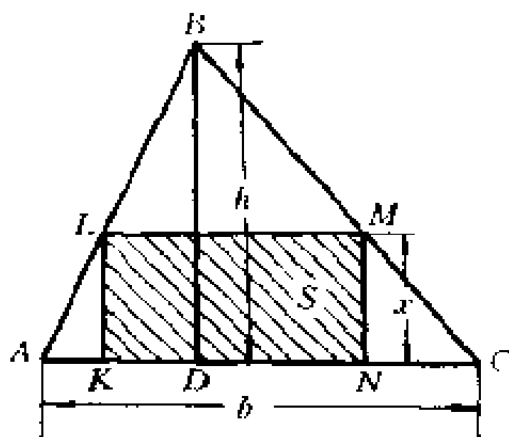


图 1.2

$$S = I.M \cdot x = bx \\ \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad (0 < x < h).$$

如图 1·4 所示, 它是一段不包含 O 点及 E 点的抛物线弧 \widehat{OAB} 。

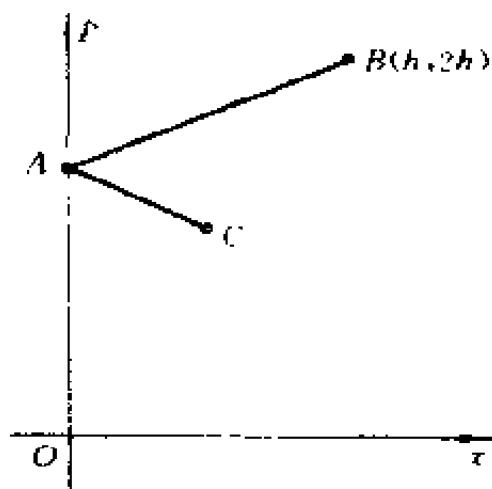


图 1.3

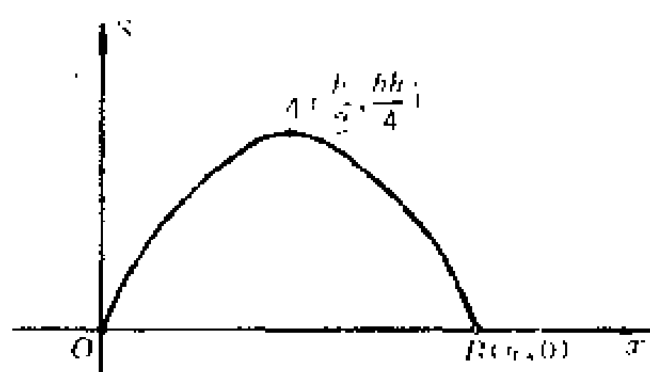


图 1.4

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB=6$ 厘米, 边 $AC=8$ 厘米, 角 $BAC=x$. 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量 x 的函数, 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos x} = \sqrt{100 - 96 \cos x} \\ (0 < x < \pi),$$

如图 1·5 所示(系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧 \widehat{AB}). 面三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin x = 24 \sin x \quad (0 < x < \pi).$$

如图 1·6 所示(两轴单位取得不同, 系一不包含 O 点及 A 点的弧 \widehat{OBA}).

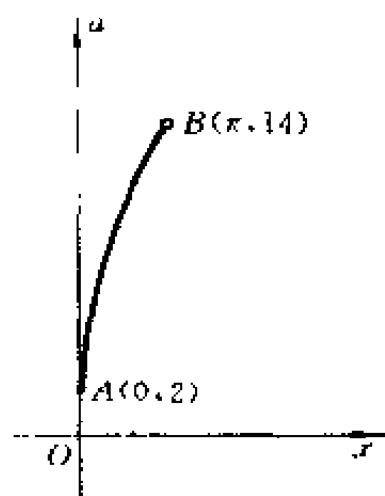


图 1.5

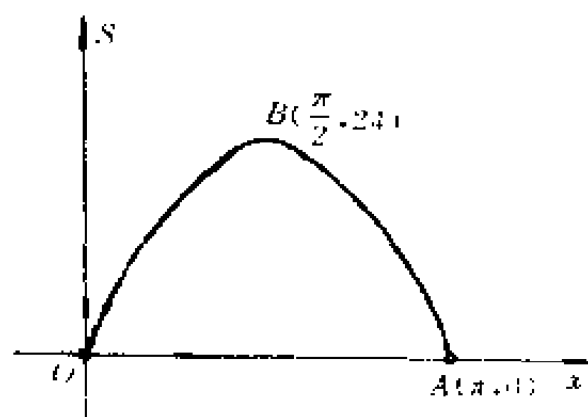


图 1.6

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 1.7), 底为 $AD=a$, $BC=b$ ($a > b$), 高为 $HB=h$, 引直线 $MN \parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM=x$, 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数. 作函数 $S=S(x)$ 的图形.

解 $AH = \frac{1}{2}(a-b)$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$ 时, 即 MN 线在 $\triangle ABH$ 内, 此时

$$\frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}}, MN = \frac{2hx}{a-b}.$$

于是,

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot x = \frac{hx^2}{a-b},$$

如图 1.8 中弧 \widehat{OA} (系抛物线段).

(2) 当 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + h = \frac{a+b}{2}$ 时, 面积

$$S = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + h \left(x - \frac{a-b}{2} \right) = h \left(x - \frac{a-b}{4} \right),$$

如图 1.8 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB .

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$ 时, 面积

$$S = \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b} \cdot (a-x)^2 = h \left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b} \right],$$

如图 1·8 中抛物线段 \widehat{BC} .

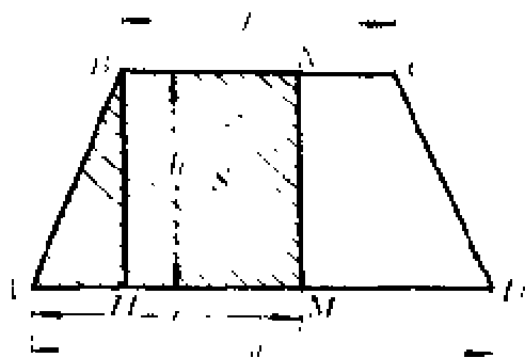


图 1.7

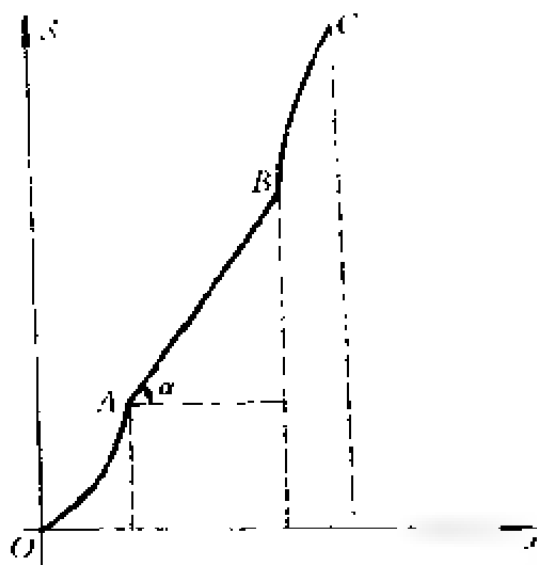


图 1.8

图 1·8 中各点的位置如下:

$$A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4}\right), B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4}\right), \\ C\left(a, \frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\operatorname{tg} \alpha = h$.

174. 在 Ox 轴上的闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着, 而在此轴上的两点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克.

设 $m(x)$ 是介于区间 $(-\infty, x)$ 的质量的值, 求函数 $m = m(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的解析表示式, 并作这个函

数的图形。

解 当 $-\infty < x \leq 0$ 时, $m(x) = 0$;

当 $0 < x \leq 1$ 时, 因为

$$1 : x - 2 : m(x),$$

于是,

$$m(x) = 2x;$$

当 $1 < x \leq 2$ 时, $m(x) = 2$;

当 $2 < x \leq 3$ 时, $m(x) = 3$;

当 $3 < x < +\infty$ 时, $m(x) = 4$.

如图 1·9 所示.

175. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$, 用下列方法来定义:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

作这个函数的图形. 证明

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 的图形如图 1·10 所示.

因为

当 $x < 0$ 时,

$$|x| = -x = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x = 0$ 时,

$$|x| = 0 = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x > 0$ 时,

$$|x| = x = x \operatorname{sgn} x.$$

所以,

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

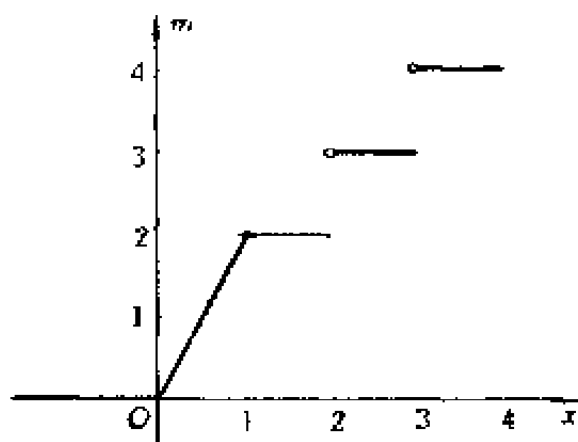


图 1.9

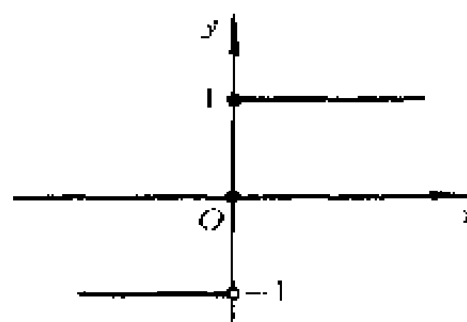


图 1.10

176. 函数 $y=[x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x=n+r$, 式中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则

$$[x] = n.$$

作这个函数的图形.

解 当 $x \in [n, n+1]$ 时 (n 为整数) $y=n$, 如图 1.11 所示.

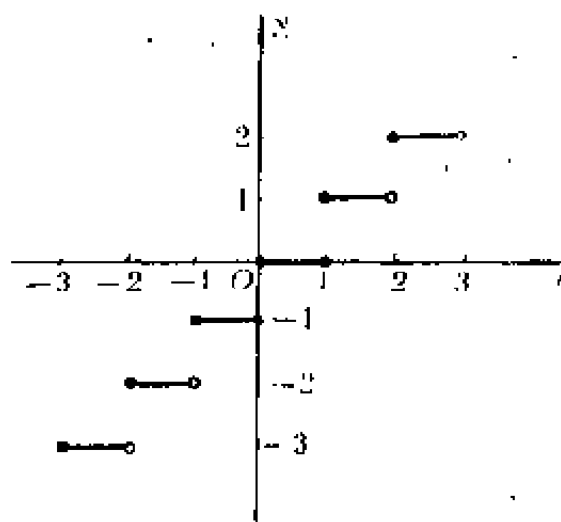


图 1.11

177. 设:

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0),$$

表示不超过数 x 的素数的数目, 对于自变数 $0 \leq x \leq 20$ 的值, 作这个函数的图形.

解 按题设可知:

当 $0 \leq x < 2$ 时, $\pi(x) = 0$;

当 $2 \leq x < 3$ 时, $\pi(x) = 1$;

当 $3 \leq x < 5$ 时, $\pi(x) = 2$;

当 $5 \leq x < 7$ 时, $\pi(x) = 3$;

当 $7 \leq x < 11$ 时, $\pi(x) = 4$;

当 $11 \leq x < 13$ 时, $\pi(x) = 5$;

当 $13 \leq x < 17$ 时, $\pi(x) = 6$;

当 $17 \leq x < 19$ 时, $\pi(x) = 7$;

当 $19 \leq x \leq 20$ 时, $\pi(x) = 8$ (如图 1.12 所示).

函数 $y = f(x)$ 在怎样的集合 E_y 上映出集合 E_x , 若:

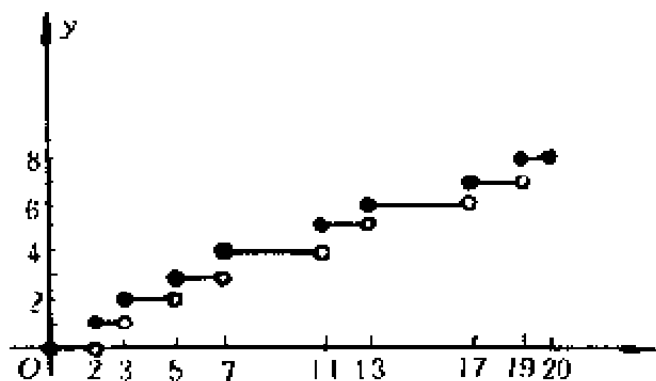


图 1.12

178. $y = x^2, E_x = \{1 \leq x \leq 2\}.$

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 4\}.$

179. $y = \lg x, E_x = \{10 < x < 1000\}.$

解 $E_y = \{1 < y < 3\}.$

$$180. y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

解 $E_y = \{0 < y < 1\}.$

$$181. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leq 1\}.$$

解 $E_y = \{1 < |y| < +\infty\}.$

$$182. y = |x|, E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}.$$

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 2\}.$

变量 x 跑过区间 $0 < x < 1$, 则变量 y 跑过怎样的集合, 若

$$183. y = a + (b - a)x.$$

解 变量 x 从 0 变至 1 时, y 从 a 变至 b . 于是, 变量 y 的变化区间为 $a < y < b$ (当 $a < b$) 或 $b < y < a$ (当 $b < a$).

$$184. y = \frac{1}{1-x}.$$

解 当 x 从 0 变至 1 时, y 从 1 变至正无穷大. 于是, y 的变化区间为 $1 < y < +\infty$.

$$185. y = \frac{x}{2x-1}.$$

解 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}.$

当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$, y 从 0 变至负无穷大; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从正无穷大变至 1. 于是, y 的变化区间为 $-\infty < y < 0, 1 < y < +\infty$.

$$186. y = \sqrt{x-x^2}.$$

解 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}$ (最大值); 由于 x 趋于 0 时, y 趋于 0, 而 $y > 0$, 从而 $y = 0$ 是变量 y 的下确界. 于是, y 的

变化区间为 $0 < y \leq \frac{1}{2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时, 变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是, 变量 y 的变化区间为 $-\infty < y < +\infty$.

188. $y = x + [2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时, y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2. 于是, y 的变化区间为 $0 < y < \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leq y < 2$.

189. 设:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

求 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$.

解 因为 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 所以,

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0,$$

$$f(4) = 24.$$

190. 设:

$$f(x) = \lg x^2,$$

求 $f(-1), f(-0.001), f(100)$.

解 $f(-1) = \lg 1 = 0$;

$$f(-0.001) = \lg 0.000001 = -6;$$

$$f(100) = \lg 10000 = 4.$$

191. 设:

$$f(x) = 1 + [x],$$

求 $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(1)$.

解 $f(0.9) = f(0.99) = f(0.999) = 1,$
 $f(1) = 2$

192. 设:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0; \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2).$

解 $f(-2) = 1-2 = -1, f(-1) = 1-1 = 0,$
 $f(0) = 1+0 = 1, f(1) = 2^1 = 2,$
 $f(2) = 2^2 = 4$

193. 设:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}.$

解 $f(0) = 1,$

$$f(-x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

194. 设:

$$(a) f(x) = x - x^3; (b) f(x) = \sin \frac{\pi}{x};$$

$$(B) f(x) = (x + |x|)(1 - x).$$

求使以下各式满足的 x 值:

$$(1) f(x) = 0; (2) f(x) > 0; (3) f(x) < 0.$$

解 (A) (1) $x - x^3 = 0$, 所以, $x = 0, 1$ 及 -1 .

$$(2) x - x^3 > 0, \text{即 } x(1 - x)(1 + x) > 0,$$

所以, $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$.

(3) $x(1 - x)(1 + x) < 0$, 所以, $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$.

(6) (1) $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, 则 $\frac{\pi}{x} = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 所以, $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(2) $\sin \frac{\pi}{x} > 0$, 则 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 和 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$, 所以

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \text{ 和 } -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2} \\ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(3) $\sin \frac{\pi}{x} < 0$, 则 $(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+2)\pi$ 和 $-(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < -2k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$,

所以, $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1} (k = 0, 1, 2, \dots)$,

(B) (1) $(x + |x|)(1 - x) = 0$, 则 $x \leq 0$ 和 $x = 1$.

(2) 因为 $x + |x| \geq 0$, 所以 $1 - x > 0$, 即 $x < 1$.

而由 $f(x) > 0$, 得 $x + |x| > 0$, 即 $x > 0$.

总之, 当 $0 < x < 1$ 时, $(x + |x|)(1 - x) > 0$.

(3) $(x + |x|)(1 - x) < 0$.

首先, $x > 0$, 否则 $x + |x| = 0$.

其次, 应有 $1 - x < 0$, 所以 $x > 1$, 此即所求之解。

195. 设:

(a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = a^x$.

求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

解 (a) $\varphi(x) = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = a$;

(b) $\varphi(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$;

(B) $\varphi(x) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$.

196. 设:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

证明 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$.

证 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$

$$\begin{aligned} &= a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c] + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] \\ &\quad - [ax^2 + bx + c] = ax^2 + 6ax + 9a + bx + 3b + c \\ &\quad - 3ax^2 - 12ax - 12a - 3bx - 6b - 3c + 3ax^2 \\ &\quad + 6ax + 3a + 3bx + 3b + 3c - ax^2 - bx - c \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$$

197. 若 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求线性整函数:

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么(线性补插法)?

解 因为 $f(0)=b=-2$ 及 $f(3)=3a+b=5$,
所以,

$$a=\frac{7}{3}, b=-2.$$

于是,所求的线性整函数为

$$f(x)=\frac{7}{3}x-2,$$

$$\text{且 } f(1)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{8}{3}.$$

198. 若 $f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$. 求二次有理整函数:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于什么(二次补插法)?

解 因为 $f(-2)=4a-2b+c=0$,

$$f(0)=c=1, f(1)=a+b+c=5,$$

$$\text{所以, } a=\frac{7}{6}, b=\frac{17}{6}, c=1.$$

于是,所求的二次有理整函数为

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1,$$

$$\text{且 } f(-1)=-\frac{2}{3}, f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}.$$

199. 设 $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$. 求三次有理整函数:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

解 因为 $f(-1)=-a+b-c+d=0$,

$$f(0)=d=2.$$

$$f(1)=a+b+c+d=-3.$$

$$f(2)=8a+4b+2c+d=5,$$

所以, $a = \frac{10}{3}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{29}{6}, d = 2$.

于是, 所求的三次有理整函数为

$$f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2.$$

200. 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$, 求形状为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数.

解 因为 $f(0) = a + b = 15$,

$$f(2) = a + bc^2 = 30,$$

$$f(4) = a + bc^4 = 90,$$

所以, $a = 10, b = 5, c = 2$ (-2 不适合).

于是, 所求的函数为

$$f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x.$$

201. 证明: 对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

若自变量的诸值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 也组成一等差级数.

证 设数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为

$$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, x_1 + 3d, \dots,$$

$$x_1 + (n-1)d, \dots$$

其中 d 为公差.

于是,

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= (ax_n + b) - (ax_{n-1} + b) \\ &= \{a[x_1 + (n-1)d] + b\} - \\ &\quad \{a[x_1 + (n-2)d] + b\} = ad, \end{aligned}$$

由于 ad 为一常数, 所以, 数列 $y_n = f(x_n)$ 也组成等差级数.

202. 证明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x (a > 0),$$

若自变数 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的值组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 组成一等比级数.

证 因为 $x_n - x_{n-1} = d$, 所以

$$y_n : y_{n-1} = a^{x_n} : a^{x_{n-1}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^d,$$

即函数值 $y_n = f(x_n)$ 组成一等比级数.

203. 设当 $0 < u < 1$ 函数 $f(u)$ 有定义, 求下列函数的定义域:

$$(a) f(\sin x)^+; (b) f(\ln x); (c)^+ f\left(\frac{[x]}{x}\right).$$

解 (a) 因为 $0 < \sin x < 1$, 所以,

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 且}$$

$$x \neq \frac{4k+1}{2}\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(b) \text{ 因为 } 0 < \ln x < 1, \text{ 所以, } 1 < x < e;$$

$$(c) \text{ 因为 } 0 < \frac{[x]}{x} < 1,$$

所以, $x > 1$ 且 $x \neq k (k = 2, 3, 4, \dots)$.

204. 设:

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) (a > 0).$$

证明: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

证 $f(x+y) + f(x-y)$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y}+a^y) \\
&= \frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y}) \\
&= 2f(x)f(y),
\end{aligned}$$

于是,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. 设:

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

求出 z , 若:

$$(a) f(x)=ax; \quad (b) f(x)=\frac{1}{x};$$

$$(B) f(x)=\operatorname{arctg} x (|x|<1); \quad (r) f(x)=\lg \frac{1+x}{1-x}.$$

解 (a) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y),$
 $f(z)=az,$

由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y.$

$$(b) \text{ 由 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \text{ 得 } z = \frac{xy}{x+y}.$$

(B) 由 $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$ 得

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} z$$

所以, $z = \frac{x+y}{1-xy};$

$$(r) \text{ 由 } \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1+y}{1-y} = \lg \frac{1+z}{1-z} \text{ 得}$$

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z},$$

所以, $z = \frac{x+y}{1+xy}.$

求 $\varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$, 设:

206. $\varphi(x) = x^2$ 及 $\psi(x) = 2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = (x^2)^2 = x^4$; $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$;
 $\psi[\psi(x)] = 2^{(2^x)}$; $\psi[\varphi(x)] = 2^{(x^2)}$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$;

$$\psi[\psi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x (x \neq 0);$$

$$\varphi[\psi(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0);$$

$$\psi[\varphi(x)] = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$ 及 $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ -x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$; $\psi[\psi(x)] = 0$ (因为 $-x^2 \leq 0$);
 $\varphi[\psi(x)] = 0$; $\psi[\varphi(x)] = \psi(x)$.

209. 设:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x};$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

210. 设:

$$f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}.$$

若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 当 $n=2$ 时, $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设对于 $n=k$ 时, 有

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

211. 设:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2,$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1) = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

212. 设:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 2.$$

213. 设:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$, 于是,

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

证明下列各函数在所示间隔内是单调增函数:

214. $f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty).$

证 当 $x_2 > x_1 \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0, \end{aligned}$$

于是 $f(x) = x^2$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 内是单调增函数.

215. $f(x) = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$

证 当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以, } \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \text{ 及 } \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0.$$

$$\text{又因 } f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1$$

$$= 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$$

所以, $f(x) = \sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

216. $f(x) = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right).$

$$\begin{aligned}\text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2},\end{aligned}$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x_1 > 0, \cos x_2 > 0$ 及 $\sin(x_2 - x_1) > 0$, 从而可知

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

所以, $f(x) = \operatorname{tg} x$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

217. $f(x) = 2x + \sin x (-\infty < x < +\infty)$.

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1,$$

因为 $|\sin x_2 - \sin x_1|$

$$\begin{aligned}&= 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{1} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = |x_2 - x_1|,\end{aligned}$$

所以当 $x_2 < x_1$ 时, 有

$$-(x_2 - x_1) \leq \sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1,$$

从而

$$2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 > 2(x_2 - x_1)$$

$$-(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 > 0,$$

即 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 于是, $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内是单调增函数.

证明下列各函数在所示间隔内是单调减函数:

218. $f(x) = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0)$.

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$$

$$(x_1 < x_2 < 0),$$

于是, $f(x) = x^2$ 在 $-\infty < x \leq 0$ 内是单调减函数.

219. $f(x) = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

$$\begin{aligned}\text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \cos x_2 - \cos x_1 \\ &= -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2},\end{aligned}$$

当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

于是, $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

即 $f(x) = \cos x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 内是单调减函数.

220. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x < \pi$).

$$\begin{aligned}\text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} \\ &= \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0 \\ &\quad (\text{当 } 0 < x_1 < x_2 < \pi \text{ 时}),\end{aligned}$$

于是, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ 在 $0 < x < \pi$ 内是单调减函数.

221. 研究下列函数的单调性:

$$(a) f(x) = ax + b; \quad (b) f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$(c) f(x) = x^3; \quad (d) f(x) = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(e) f(x) = a^x (a > 0).$$

解 (a) 对于 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.
当 $a > 0$ 时, 它大于零; 当 $a < 0$ 时, 它小于零. 所以, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 是减函数.

$$(b) f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

(1) 当 $a > 0$ 时, 图形呈凹形, 顶点在 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内, 函数单调下降, 在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$, 函数单调上升.

(2) 当 $a < 0$ 时, 图形呈凸状. 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内增加, 而在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ 内减小.

$$(B) f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3$$

+ $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$ ($x_2 > x_1$), 于是 $f(x) = x^3$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内单调增加.

(r) $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - a\frac{d}{c}}{cx + d}$, 其中 $c \neq 0$, 若 $c = 0$, 则同 (a) 一样讨论. 下面不妨就 $c > 0$ 讨论其增减性.

(1) 当 $b > a\frac{d}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值减小.

所以, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ 内减小.

(2) 当 $b < \frac{ad}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值也增加. 所以, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ 内增加.

$$(A) f(x_2) - f(x_1) = a_2^x - a_1^x. \text{ 若 } x_2 > x_1, \text{ 则}$$

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内减小.

当 $a > 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 此时, $f(x)$ 在 $-\infty$

$< x < +\infty$ 内增加.

222. 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以, 当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数. 若底介于 0 与 1 之间, 则为单调减函数, 所以, 此时就不能逐项取对数.

223. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明: 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (1)$$

$$\text{则 } \varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]. \quad (2)$$

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点, 则

$$\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0).$$

由(1) 以及函数 $f(x)$ 的单调增性知

$$f[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)],$$

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[\varphi(x_0)];$$

从而

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)].$$

同理, 可证

$$f[f(x_0)] \leq \psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性, 于是(2) 式得证.

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域, 若:

224. $y = 2x + 3$ ($-\infty < x < +\infty$).

$$\text{解 } x = \frac{y-3}{2}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

225. $y = x^2$. (a) ($-\infty < x \leq 0$); (b) ($0 \leq x < +\infty$).

$$\text{解 } (a) x = -\sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty;$$

$$(b) x = \sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty.$$

226. $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$).

解 由于 $y + xy = 1 - x$, 解出 x 得反函数

$$x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1.$$

227. $y = \sqrt{1-x^2}$. (a) $(-1 \leq x \leq 0)$; (6) $(0 \leq x \leq 1)$.

解 (a) $x = -\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1$;

(6) $x = \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1$.

228. $y = \operatorname{sh} x$, 式中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) (-\infty < x < +\infty)$.

解 由于 $2y = e^x - e^{-x}$, 即

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$$

解出 e^x 两端再取对数, 即得

$$x = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad -\infty < y < +\infty.$$

229. $y = \operatorname{th} x$, 式中 $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} (-\infty < x < +\infty)$.

解 由于 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$, 即

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

两端取对数, 并注意到 $\frac{1+y}{1-y} > 0$ 即 $-1 < y < 1$, 于是

$$x = \operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad -1 < y < 1.$$

230. $y = \begin{cases} x, & \text{若 } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{若 } 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解

$$x = \begin{cases} y, & \text{若 } -\infty < y < 1; \\ \sqrt{y}, & \text{若 } 1 \leq y \leq 16; \\ \log_2 y, & \text{若 } 16 < y < +\infty. \end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l, l)$ 中, 且若

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数, 若

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列各已知函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(a) $f(x) = 3x - x^3$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(c) $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$; (d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 (a) $f(-x) = -3x + x^3 = -f(x)$, 故为奇函数.

(b) $f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x)$,
故为偶函数.

(c) $f(-x) = a^{-x} + a^x = f(x)$, 故为偶函数.

(d) $f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$,

故为奇函数.

$$\begin{aligned} (e) f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

故为奇函数.

232. 证明定义于对称区间 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证 因为

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

而 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数, 于是本题得证.

233. 若存在有数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上) 使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x + nT) = f(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数, 并求它们的最小周期. 设:

$$(a) f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

$$(b) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x;$$

$$(B) f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}; \quad (r) f(x) = \sin^2 x;$$

$$(\lambda) f(x) = \sin x^2; \quad (e) f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$(\kappa) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}; \quad (s) f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

解 对于(a), 由于

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) &= A \cos \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) + B \sin \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\ &= A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = f(x), \end{aligned}$$

故为周期函数, 最小周期为 $T = \frac{2\pi}{\lambda} (\lambda > 0)$. 同理可证:

(a)、(B)、(r) 和 (e) 也是周期函数, 最小周期分别为 2π 、 6π 、 π 和 π . 对于(λ), 若周期为 a , 即 $\sin(x+a)^2 = \sin x^2$.

令 $x = 0$ 即得 $a = \pm \sqrt{m\pi} (m \text{ 为某正整数})$, 代入, 又令 x

$= \sqrt{2m\pi}$, 易得 $\sin(2\sqrt{2m}\pi) = 0$. 但 $2\sqrt{2m}$ 显然不是整数, 得到矛盾. 于是, $\sin x^2$ 不是周期函数. 同理, (ж) 和 (з) 也不是周期函数.

234. 证明: 对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设 l 为任一有理数, 则当 x 为有理数时, $x+l$ 也为有理数. 若 x 为无理数, 则 $x+l$ 也为无理数, 所以

$$\chi(x+l) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

即 $\chi(x+l) = \chi(x)$, l 为周期.

235. 证明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数, T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数, 即

$$T_1 = Tk_1, T_2 = Tk_2,$$

其中 k_1, k_2 为正整数. 于是

$$f_1(x + k_2T_1) = f_1(x), f_2(x + k_1T_2) = f_2(x).$$

设

$$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), F_2(x) = f_1(x)f_2(x),$$

可以证明, k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} F_1(x + k_1k_2T) &= f_1(x + k_1k_2T) \\ &+ f_2(x + k_1k_2T) \end{aligned}$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x).$$

$$\begin{aligned} F_2(x + k_1 k_2 T) &= f_1(x + k_1 k_2 T) f_2(x + k_1 k_2 T) \\ &= f_1(x) f_2(x) = F_2(x). \end{aligned}$$

从而本题得证.

236. 证明: 若对于函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 有等式

$$f(x + T) = k f(x)$$

(式中 k 和 T 为正的常数) 成立, 则

$$f(x) = a^x \varphi(x)$$

(式中 a 为大于零的常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数).

证 由假定 $k > 0, T > 0$, 令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$, 则 $a^T = k$. 于是有

$$f(x + T) = a^T f(x).$$

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下:

$$\varphi(x) = a^{-x} f(x).$$

易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上,

$$\begin{aligned} \varphi(x + T) &= a^{-(x+T)} f(x + T) = a^{-x} a^{-T} a^T f(x) \\ &= a^{-x} f(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§ 4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y = f(x)$ 的图形可用下法来进行: (1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$; (2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 $x_1, x_2,$

\dots, x_n 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的对应数值表; (3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 并用线把它们连接起来, 此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置.

2° 为了得到函数的正确图形, 应当研究这个函数的一般性质.

首先必须: (1) 解方程式 $f(x) = 0$, 求出函数图形与 Ox 轴的交点(函数值为零的点); (2) 确定使函数为正或为负时自变数的变域; (3) 尽可能地说明函数单调(增或减)的区间; (4) 研究当自变数无限趋近于函数存在域的境界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质, 如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质, 不用作大量的计算工作, 立即可以画出许多函数的略图, 其他的图形有时就是这些最简单图形的组合(和或乘积等等).

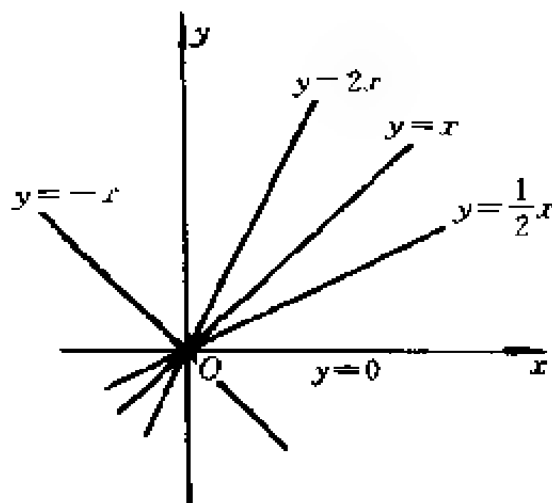


图 1.13

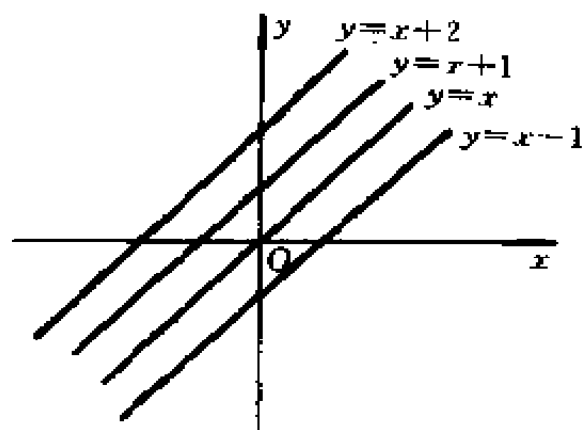


图 1.14

237. 作出线性齐次函数

$$y = ax$$

当 $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1.13 所示.

238. 作出线性函数

$$y = x + b$$

当 $b = 0, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1.14 所示.

239. 作出线性函数的图形:

(a) $y = 2x + 3$;

(b) $y = 2 - 0.1x$; (B) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

解 如图 1.15 所示.

240. 铁的线性膨胀系数 $a = 1.2 \times 10^{-6}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l = f(T)$$

$$(-40^\circ \leq T \leq 100^\circ)$$

的图形, 其中 T 表温度 (以度计), l 表当温度为

T 时铁棒的长. 设当 $T = 0^\circ$ 时, $l = 100$ 厘米.

解 铁棒的长与温度的关系为

$$l = l_0(1 + aT).$$

当 $T = 0$ 时, $l = 100$, 代入上式得 $l_0 = 100$.

于是, $l = 100(1 + 1.2 \times 10^{-6}T)$,

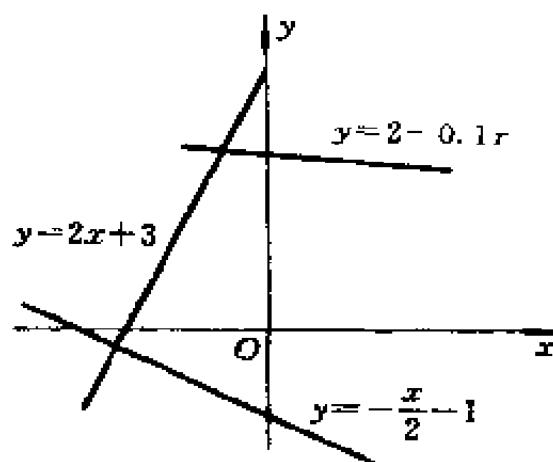


图 1.15

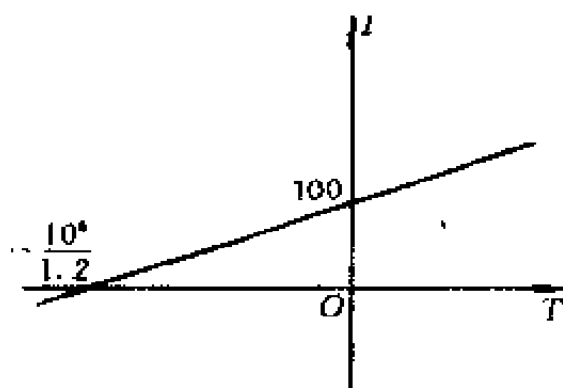


图 1.16

如图 1.16 所示(两轴单位不同).

241. 二质点在数轴上运动, 第一质点在时间 $t = 0$ 的时刻在原点左方 20 米处, 其速度为 $v_1 = 10$ 米/秒; 第二质点当 $t = 0$ 时在原点 O 之右方 30 米处, 其速度为 $v_2 = -20$ 米/秒; 作出此二点运动方程的图形并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s = 10t - 20,$$

$$s = -20t + 30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程, 得

$$t = 1\frac{2}{3}(\text{秒}), s = -3\frac{1}{3}(\text{米}),$$

即在运动开始后 $1\frac{2}{3}$ 秒, 在 Ot 轴之下方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇,

如图中 P 点所示.

242. 作出二次有理整函数的图形(抛物线):

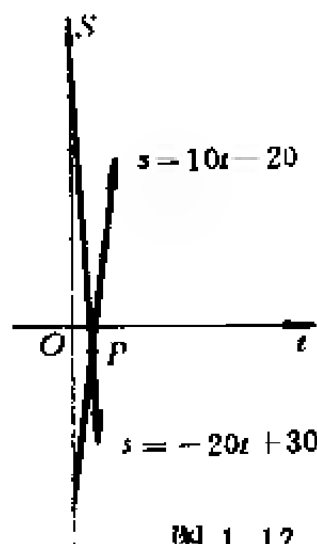


图 1.17

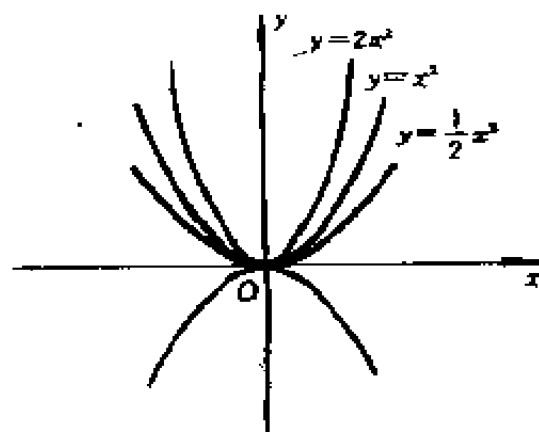


图 1.18

(a) $y = ax^2$, 当 $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

(6) $y = (x - x_0)^2$, 当 $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

(B) $= x^2 + c$, 当 $c = 0, 1, 2, -1$.

解 (a) 如图 1.18 所示.

(c) 如图 1.19 所示.

(B) 如图 1.20 所示.

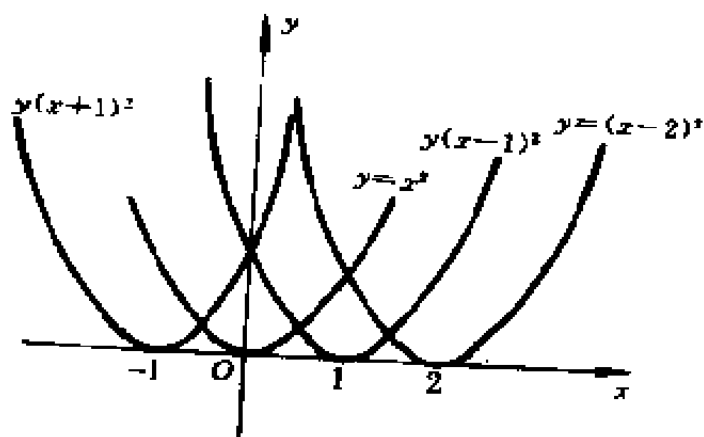


图 1.19

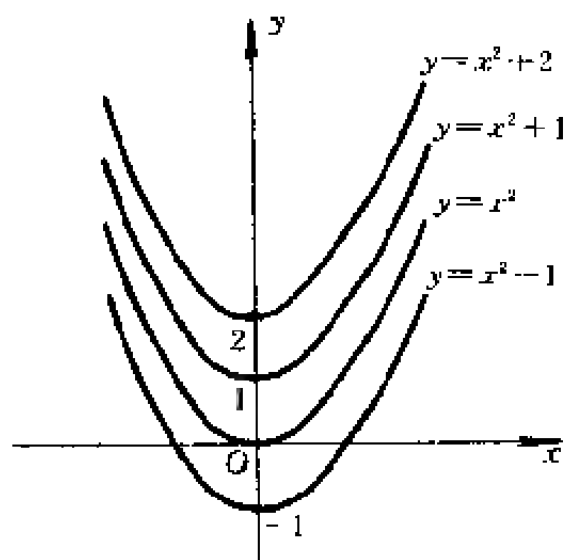


图 1.20

243. 把二次三项式

$$y = ax^2 + bx + c$$

化为下面的形状

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

作出它的图形,研究例子:

$$(a)y = 8x - 2x^2; \quad (b)y = x^2 + 3x + 2;$$

$$(c)y = -x^2 + 2x - 1; \quad (d)y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

解 利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

如图 1.21 所示.

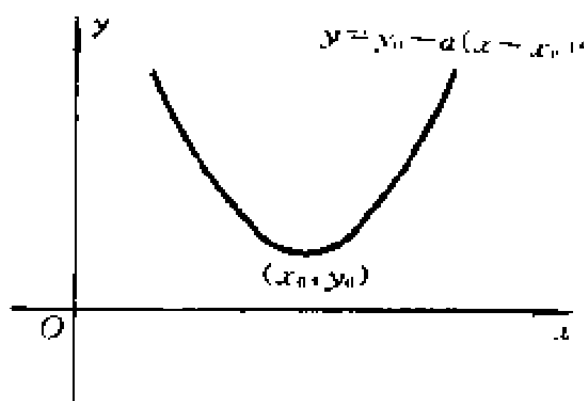


图 1.21

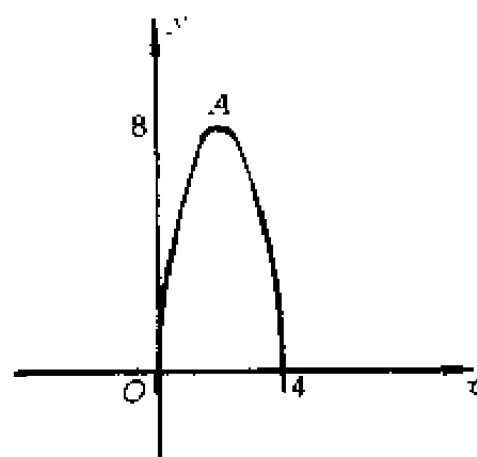


图 1.22

$$(a)y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2,$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8, \quad a = -2,$$

如图 1.22 所示,顶点 $A(2, 8)$.

$$(b)y = x^2 + 3x + 2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$x_0 = -\frac{3}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{4}, \quad a = 1,$$

如图 1.23 所示. 顶点 $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

$$(v) y = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2,$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad a = -1,$$

如图 1.24 所示. 顶点 $C(1, 0)$.

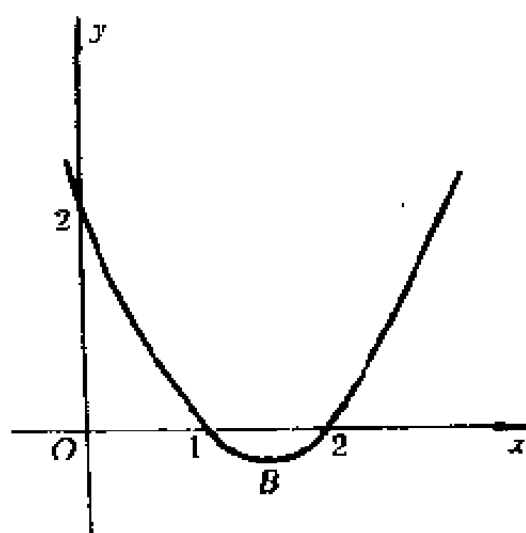


图 1.23

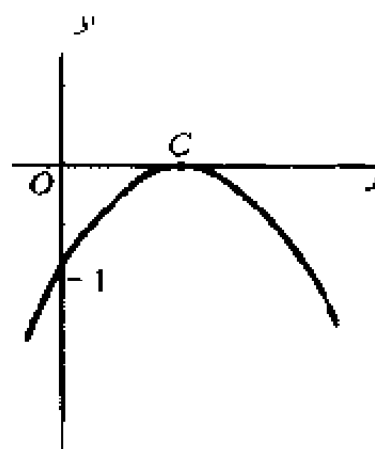


图 1.24

$$(r) y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2},$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2},$$

如图 1.25 所示. 顶点 $D(-1, \frac{1}{2})$.

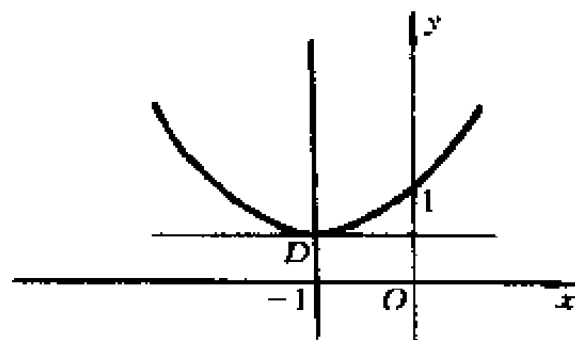


图 1.25

244. 质点以初速度 $v_0 = 600$ 米 / 每秒沿与水平面成角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向射出. 作出运动轨道的图形, 并求最大的升高及飞行的射程 (假定 $g \approx 10$ 米 / 秒², 空气的阻力不计).

解 运动轨道方程为

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

以 $v_0 = 600, g = 10, \alpha = 45^\circ$ 代入得

$$y = x - \frac{x^2}{36000},$$

即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当 $x = 18000$ 时, y 值最大, 最大升高为 9000 米;

当 $x = 36000$ 时, $y = 0$, 即飞行射程为 36000 米. 如

图 1.26 所示.

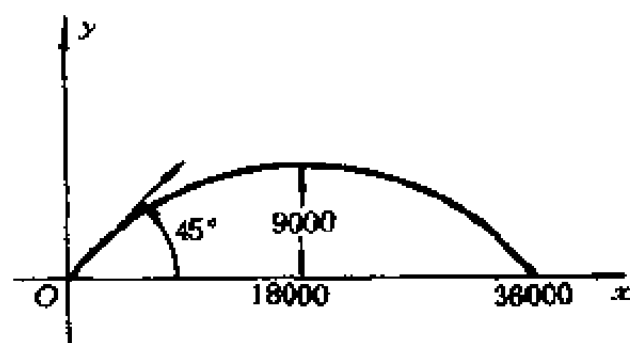


图 1.26

作出高于二次的有理整函数的图形:

245. $y = x^3 + 1.$

解 如图 1.27 所示.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x).$

解 当 $x = \pm 1, -2$ 时, $y = 0$;

当 $x < -2, -1 < x < 1$ 时, $y > 0$;

当 $-2 < x < -1$ 及 $x > 1$ 时, $y < 0$.

当 $x < -2$ 及 $x > 1$ 时, 曲线下降; 当 $-1 < x < 1$ 时, 曲线由上升到下降; 当 $-2 < x < -1$ 时, 曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

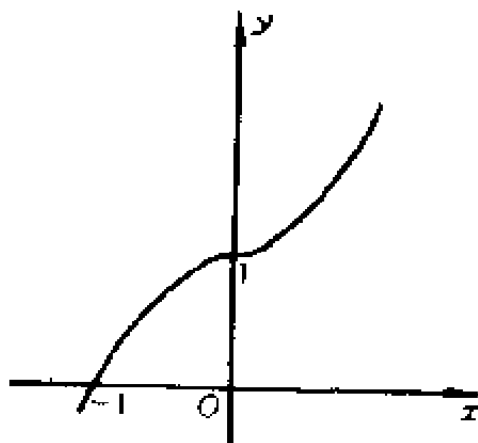


图 1.27

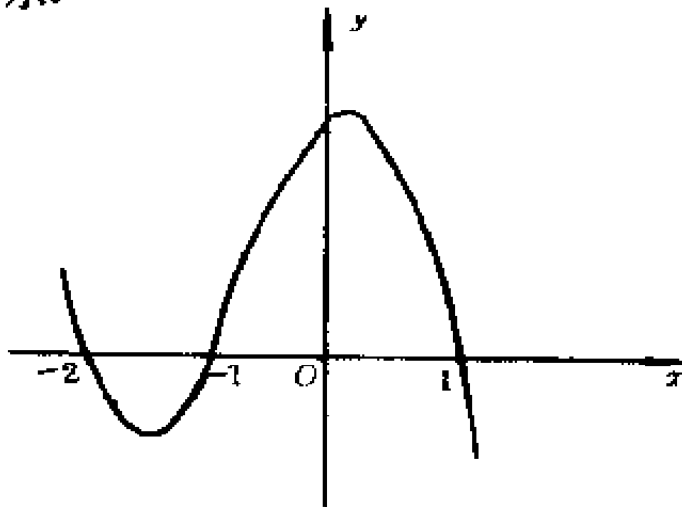


图 1.28

247. $y = x^2 - x^4$.

解 $y = x^2(1-x)(1+x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称, 与两坐标轴的交点为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$,

且在 $(0, 0)$ 点与 Ox 轴相切.

当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = \frac{1}{4}$, 此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 及

$B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 曲线上升;

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ 时, 曲线下降. 如图 1.29 所示.

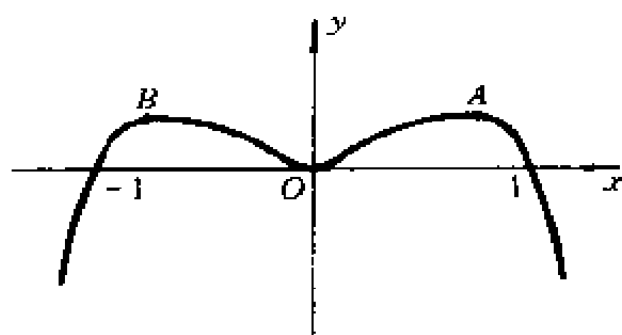


图 1.29

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$

$(a > 0)$.

解 当 $x = 0, a, -a$ 时, $y = 0$. $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 为切点.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时, $y > 0$;

当 $-a < x < 0$ 时, $y < 0$. 如图 1.30 所示.

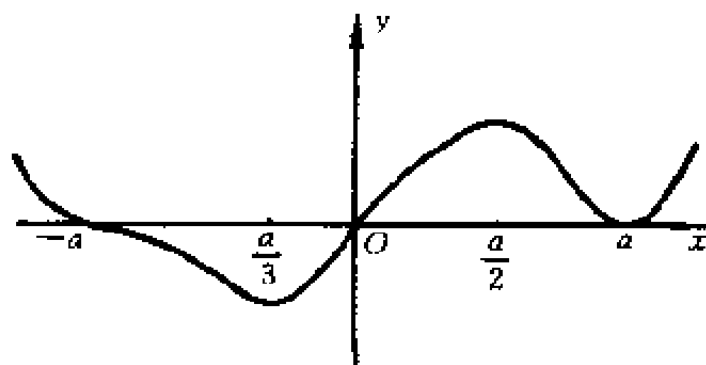


图 1.30

作出线性分式函数的图形(双曲线):

249. $y = \frac{1}{x}$.

解 如图 1.31 所示.

250. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

解 $y = -1 + \frac{2}{1+x}$,

图形的对称中心为 $(-1, -1)$, 如图 1.32 所示.

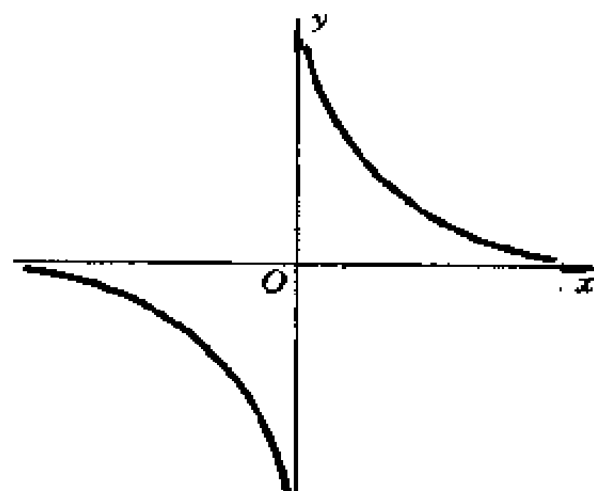


图 1.31

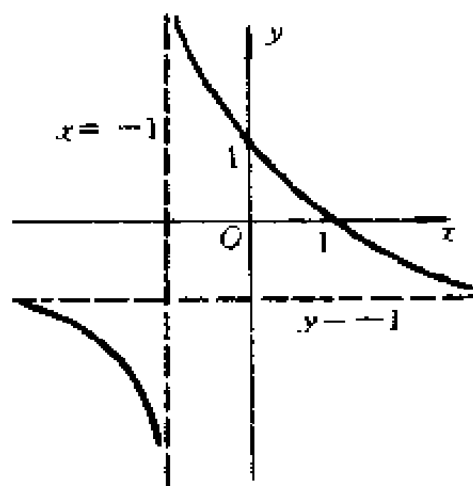


图 1.32

251. 把线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$(ad-bc \neq 0, c \neq 0),$$

化为下面的形式

$$y = y_0 + \frac{m}{x-x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}.$$

解 $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} = y_0 + \frac{m}{x-x_0},$

其中

$$x_0 = \frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

如图 1.33 所示.

对于 $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$, 有

$x_0 = y_0 = \frac{3}{2}$, 如图 1.34 所示.

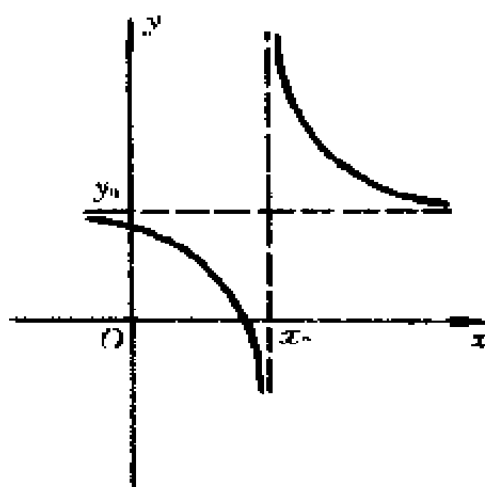


图 1.33

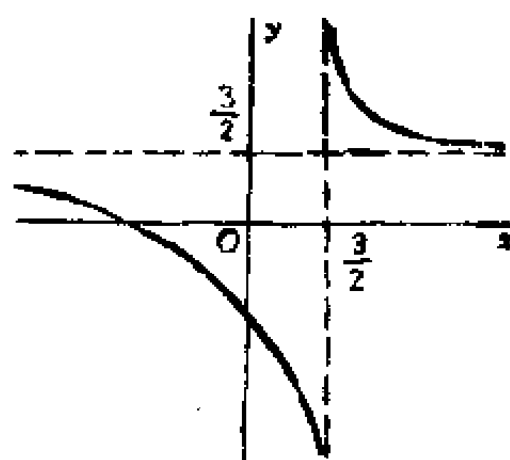


图 1.34

252. 气体当压力 $p_0 = 1$ 大气压时占有体积 $v_0 = 12$ 立方米. 设气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形(波义耳 — 马瑞阿特定律).

解 当温度 $T = k$ (常数) 时, 气体体积 v 与压力 p 成反比, 即

$$pv = C$$

其中 C 为常数.

当 $p_0 = 1$ 时, $v_0 = 12$, 故 $C = 12$, 从而 $pv = 12$, 如图 1.35 所示.

作下列有理分式函数的图形:

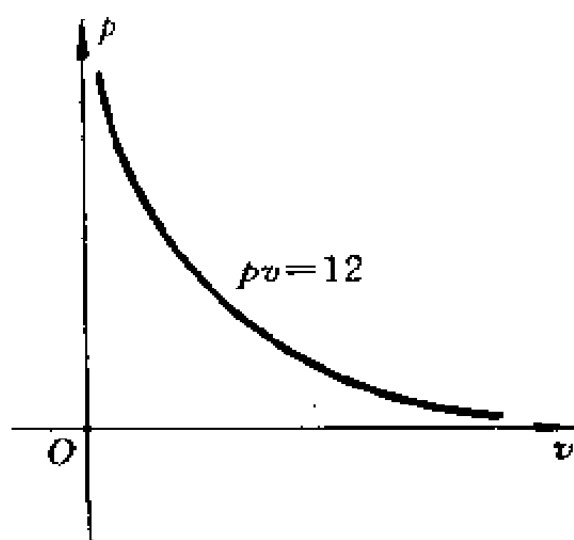


图 1.35

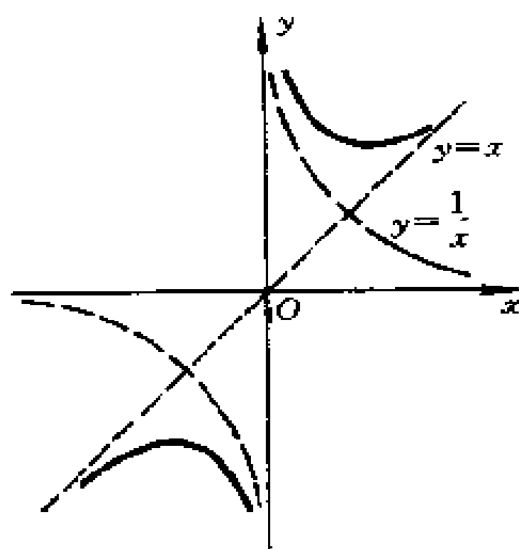


图 1.36

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (双曲线).

解 将 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1.36 中黑粗线所示.

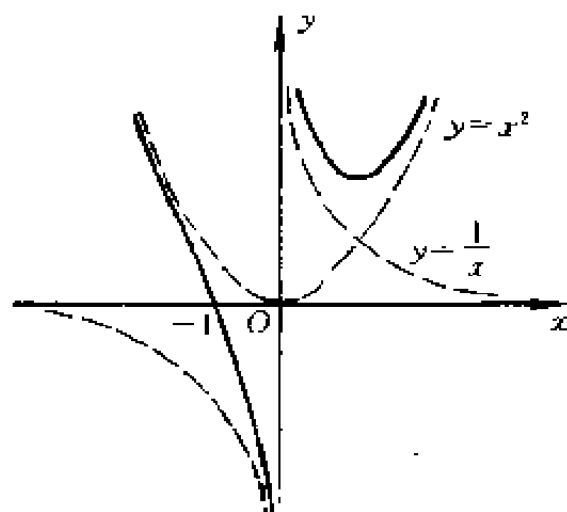


图 1.37

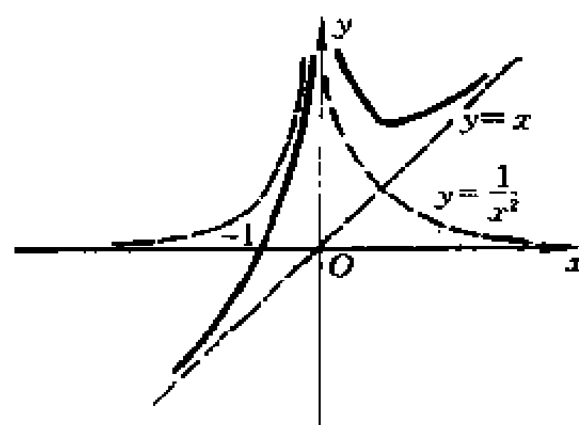


图 1.38

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三次曲线).

解 将 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1.37 中黑粗线所示.

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (箕舌线).

解 图形对称于 Oy 轴, 位于 Ox 轴上方, 最高点为 $(0, 1)$. 当 x 的绝对值无限增大时, y 值无限变小. 如图 1.39 所示.

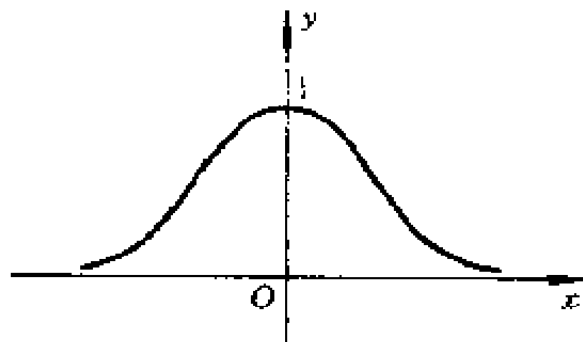


图 1.39

257. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (牛顿蛇形线).

解 以 $-x$ 换 x , y 值的绝对值不变但改变符号, 故图形对称于原点.

又因 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 故 $-1 \leq y \leq 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$, 曲线上升; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y > 0$, 曲线下降.

图形以 Ox 轴为渐近线, 如图 1.40 所示.

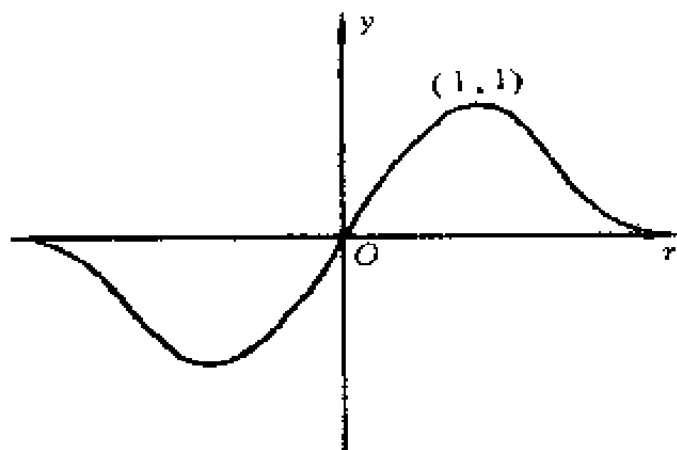


图 1.40

258. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且经过点 $(0,1)$.

当 $0 < x < 1$ 及 $x > 1$ 时, 曲线上升, 但当 $x = \pm 1$ 时, y 无意义, $x = \pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

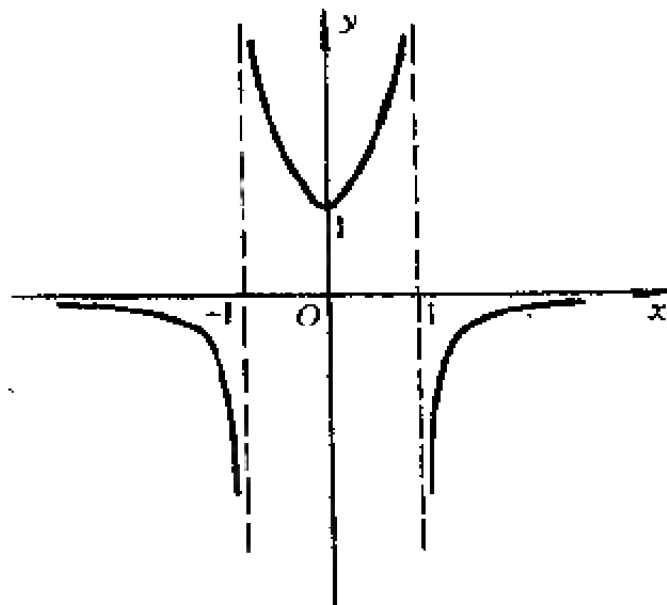


图 1.41

259. $y = \frac{x}{1-x^2}$.

解 图形关于原点对称, 且经过原点. $x = \pm 1$ 为渐近

线. 在 $(0, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 内曲线上升. 如图 1.42 所示.

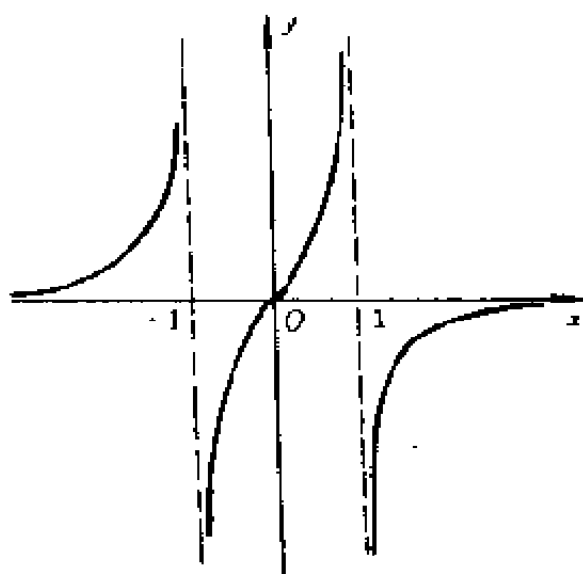


图 1.42

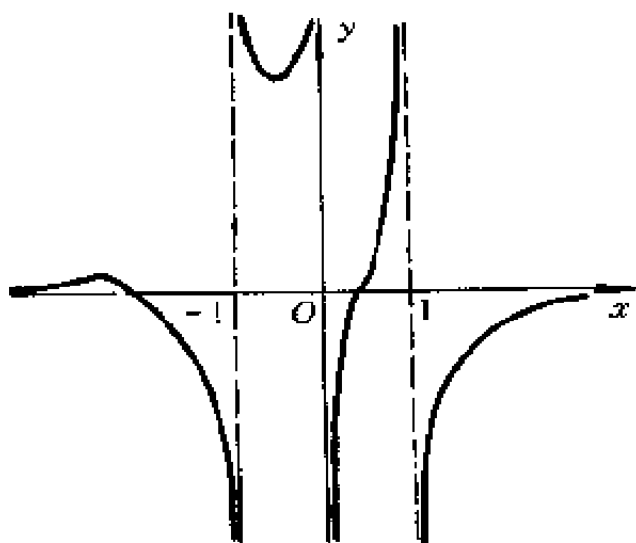


图 1.43

260. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$.

解 将 $y = \frac{1}{1+x}$, $y = -\frac{2}{x}$ 及 $y = \frac{1}{1-x}$ 的图形叠加即得, 渐近线: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 及 $y = 0$, 如图 1.43 所示.

261. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 渐近线: $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$ 及 $y = 0$. 如图 1.44 所示.

262. $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

解 $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2}$.

将 $y = 1$ 及 $y = -\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$ 的图形叠加即得. 如图 1.45 所示.

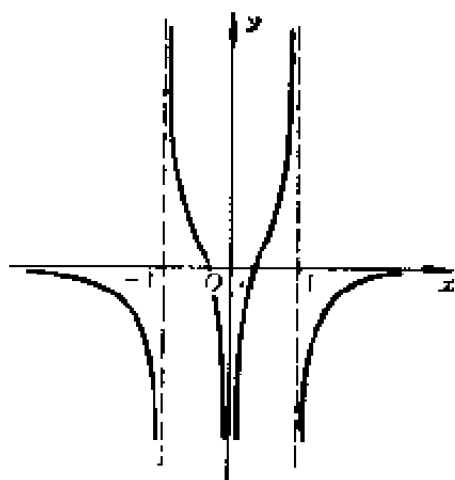


图 1.44

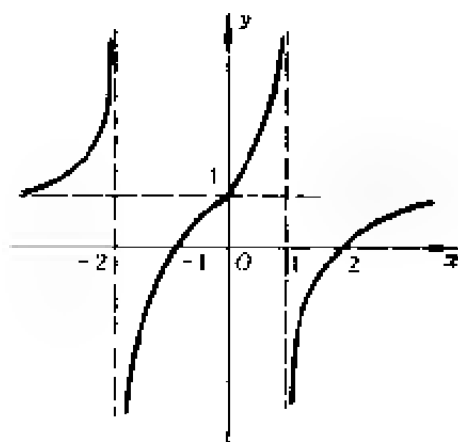


图 1.45

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为下面的形状

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0},$$

然后作出它的略图. 研究例子

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

解
$$y = \frac{a}{a_1}x + \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2} + \frac{\frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1)}{x - \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$$

$$= kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

其中 $k = \frac{a}{a_1}, m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2},$

$$x_0 = -\frac{b_1}{a_1},$$

$$n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1).$$

如图 1.46 中黑粗线所示.

$$\text{对于 } y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

$$= x - 5 + \frac{8}{x + 1},$$

如图 1.47 中黑粗线所示.

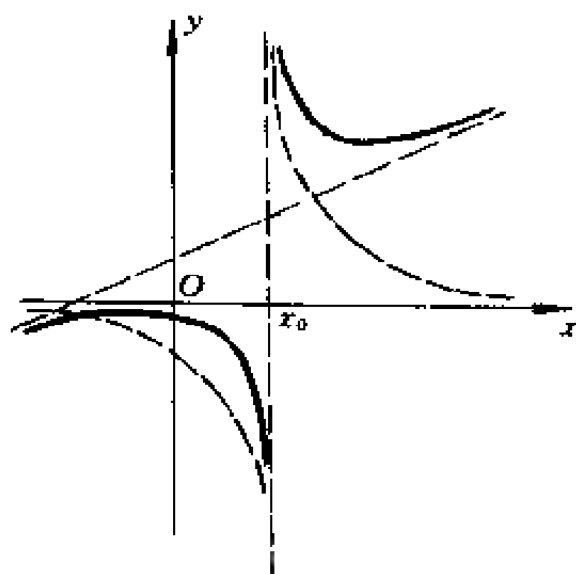
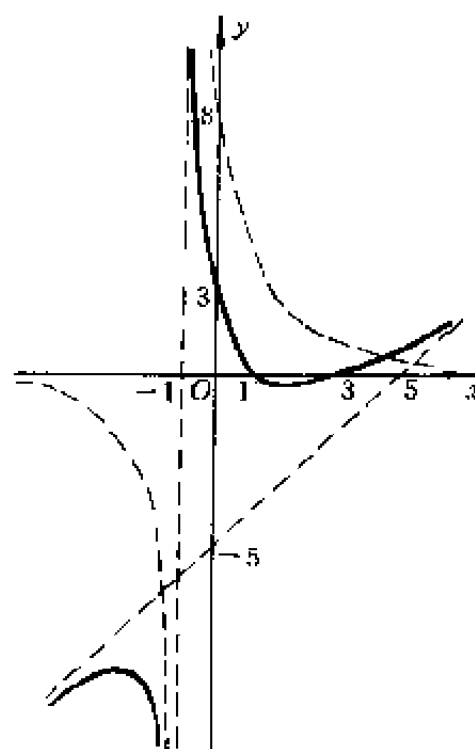


图 1.46



1.47

264. 一质点与引力中心相距 x . 设当 $x = 1$ 米时引力 $F = 10$ 千克, 作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

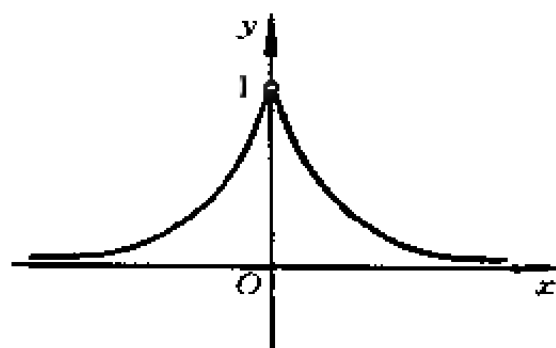


图 1.48

解 由万有引力定律知

$$F = \frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数.

当 $x = 1$ 时, $F = 10$, 从而 $k = 10$, 于是,

$$F = \frac{10}{x^2},$$

如图 1.48 所示.

265. 根据梵德耳瓦斯定律 (Закон Ван-дер-Вальса), 当温度不变时, 真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c$$

相连系.

设 $a = 2, b = 0.1$ 及 $c = 10$, 作出函数 $p = p(v)$ 的图形.

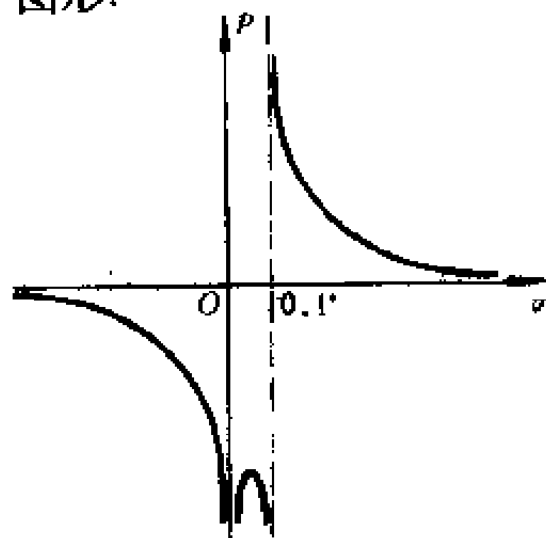


图 1.49

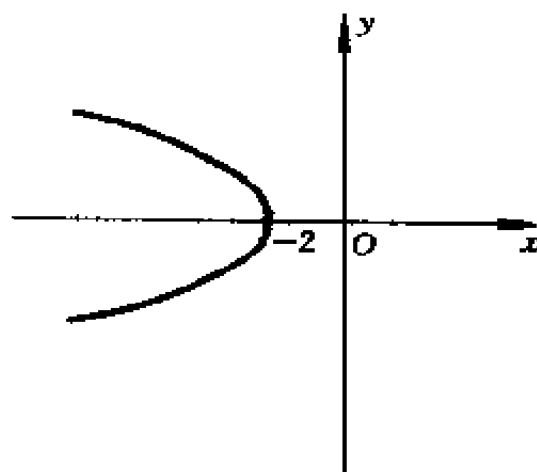


图 1.50

解 由于

$$p = \frac{10}{v - 0.1} - \frac{2}{v^2},$$

将 $p = \frac{10}{v - 0.1}$ 及 $p = \frac{2}{v^2}$ 的图形叠加即得, 如图 1.49 所示.

作下列无理函数的图形:

266. $y = \pm \sqrt{-x - 2}$ (抛物线).

解 $y^2 = -(x + 2)$, 如图 1.50 所示.

267. $y = \pm x \sqrt{x}$ (半立方抛物线).

解 $y^2 = x^3$, 如图 1.51 所示.

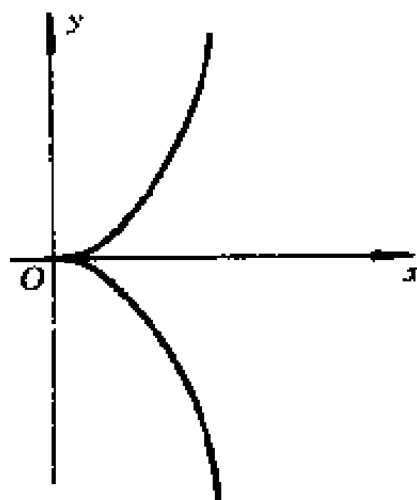


图 1.51

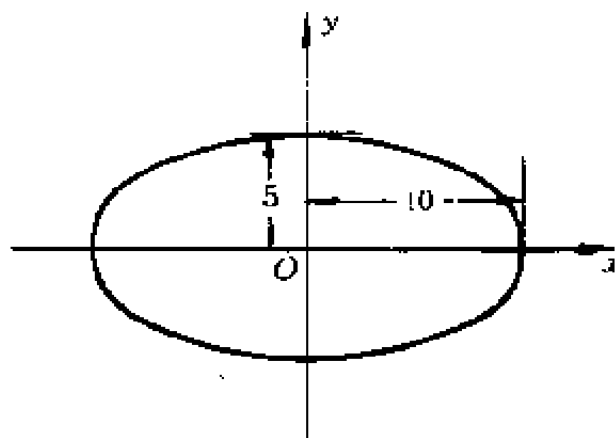


图 1.52

268. $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2}$ (椭圆).

解 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, 如图 1.52 所示.

269. $y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (双曲线).

解 $x^2 - y^2 = 1$, 如图 1.53 所示.

270. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$,

将 $x = -1$ 及 $x = \frac{2}{1+y^2}$ 的图形叠加即得, 如图 1.54 所示 ($-1 < x \leq +1$).

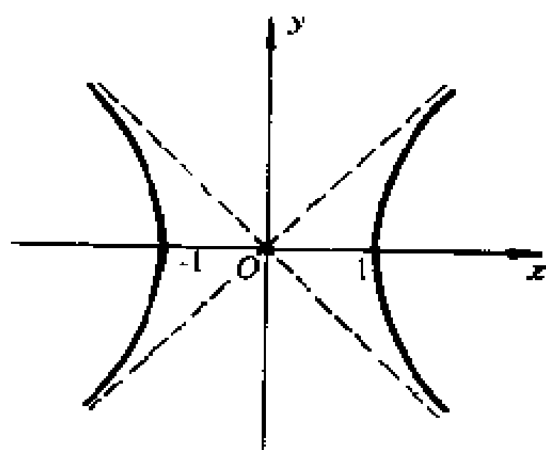


图 1.53

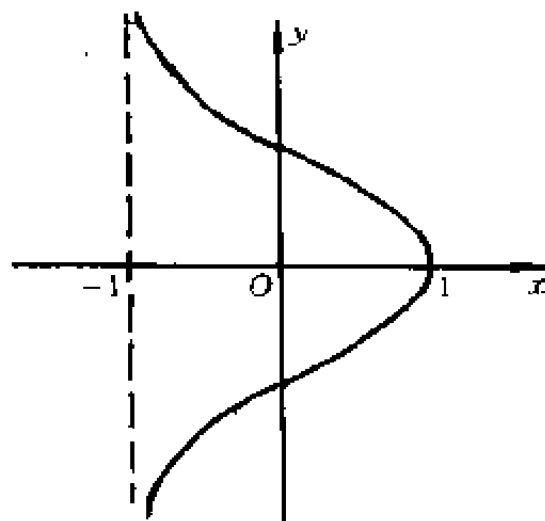


图 1.54

271. $y = \pm x \sqrt{100 - x^2}$.

解 当 $x = 0, \pm 10$ 时, $y = 0$.

将 $y = x$ 和 $y = \sqrt{100 - x^2}$ 的图形上点的纵坐标相乘, 即可描出图形. 如图 1.55 所示.

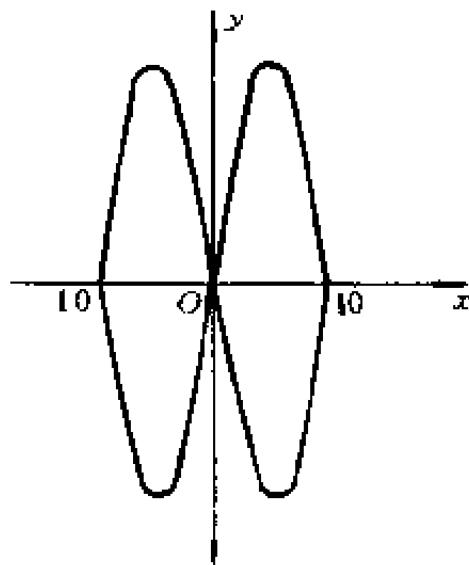


图 1.55

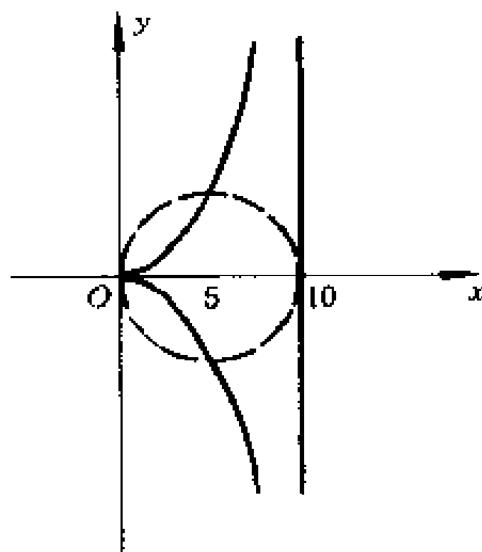


图 1.56

272. $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线).

解 $y^2(10-x) = x^3$, 如图 1.56 所示.

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解 $y = \pm \sqrt{16 - (x^2-5)^2}$. 如图 1.57 所示.

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当: (a) $n = 1, 3, 5$; (6) $n = 2, 4, 6$ 时的图形.

解 如图 1.58 所示.

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当: (a) $n = -1, -3$; (6) $n = -2, -4$ 时的图形.

解 如图 1.59 所示.

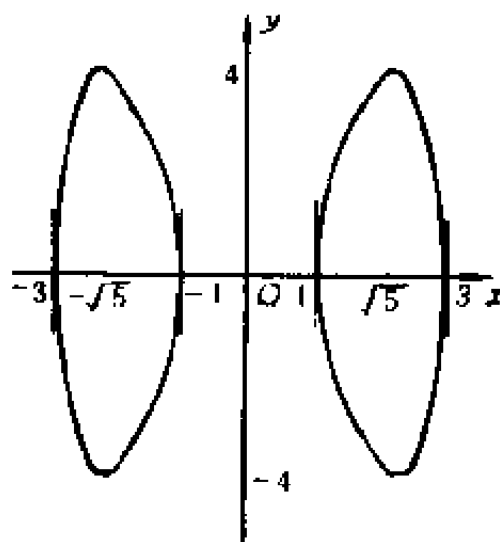


图 1.57

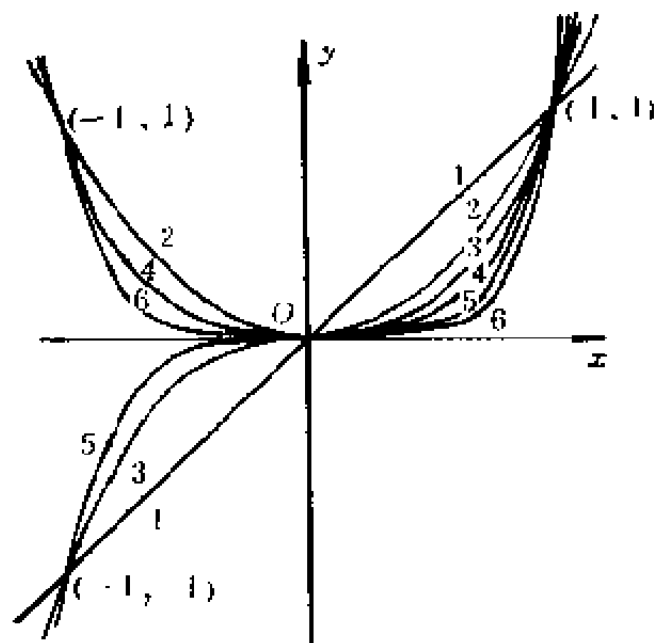


图 1.58

1. $y = \frac{1}{x}$, 2. $y = \frac{1}{x^2}$, 3. $y = \frac{1}{x^3}$, 4. $y = \frac{1}{x^4}$.

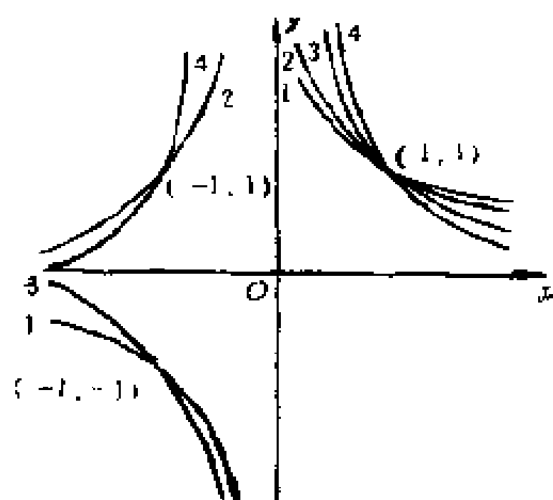


图 1.59

276. 作根式

$$y = \sqrt[m]{x}$$

当: (a) $m = 2, 4$;

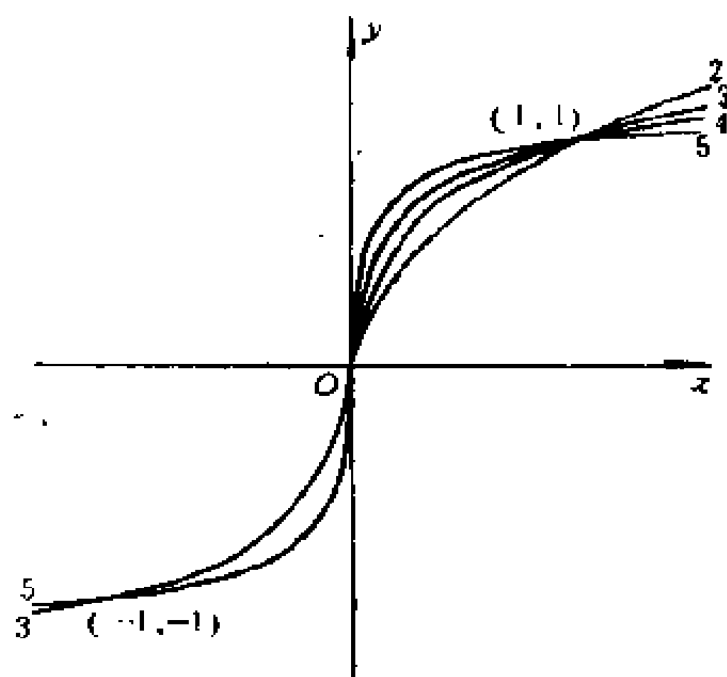


图 1.60

(b) $m = 3, 5$ 时的图形.

解 如图 1.60 所示.

277. 设:

- (a) $m = 2, k = 1$; (б) $m = 2, k = 3$;
 (в) $m = 3, k = 1$; (г) $m = 3, k = 2$;
 (д) $m = 3, k = 4$; (е) $m = 4, k = 2$;
 (ж) $m = 4, k = 3$.

作根式的图形

$$y = \sqrt[m]{x^k}$$

解 将所给数据代入 $y = \sqrt[m]{x^k}$, 可知:

(a) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形, 见图 1.60.

(б) $y = x \sqrt{x}$, 如图 1.61 所示:1;

(в) 即 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图形, 见图 1.60;

(г) $y = \sqrt[3]{x^2}$, 如图 1.61 所示:2;

(д) $y = x \sqrt[3]{x}$, 如图 1.61 所示:3;

(е) 即 $y = \sqrt{|x|}$ 的图形;

(ж) $y = \sqrt[4]{x^3}$, 如图 1.61 所示:4.

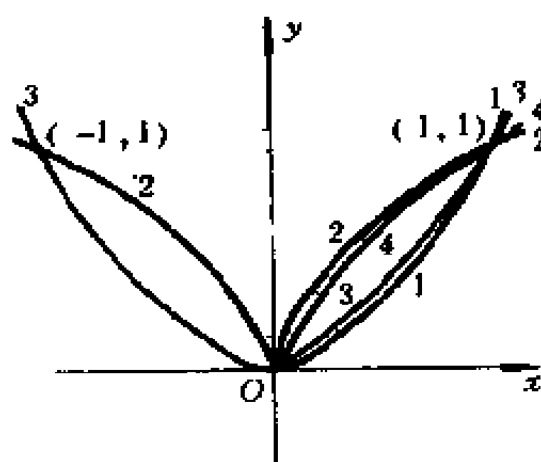


图 1.61

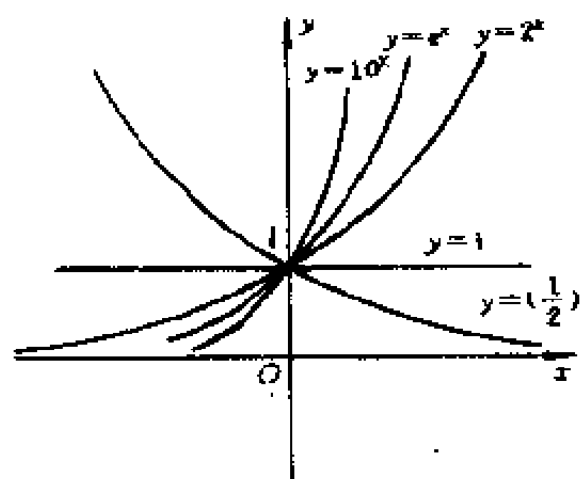


图 1.62

278. 作指数函数

$$y = a^x$$

当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.62 所示.

279. 作复合指数函数

$$y = e^{y_1}$$

的图形, 设:

(a) $y_1 = x^2$; (б) $y_1 = -x^2$; (в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

(г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; (е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 (a) 如图 1.63 所示; (б) 如图 1.64 所示;

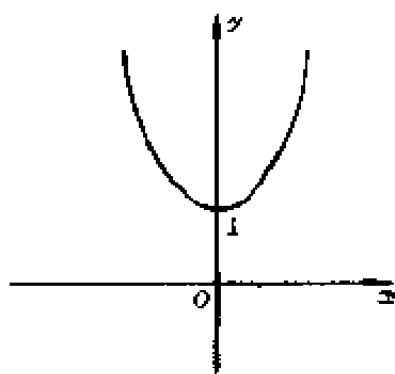


图 1.63

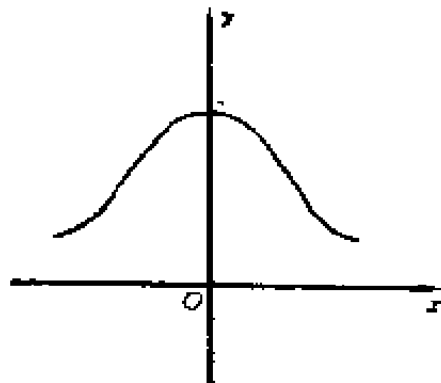


图 1.64

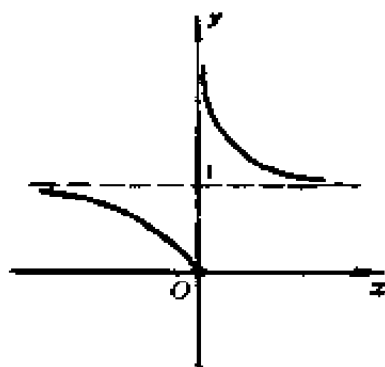


图 1.65

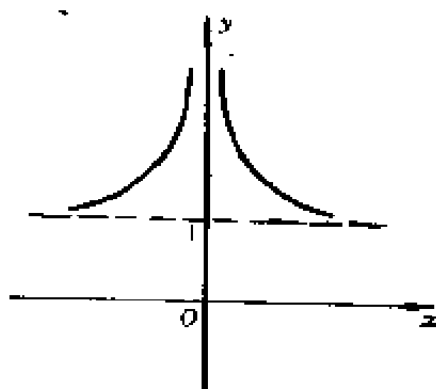


图 1.66

(в) 如图 1.65 所示; (г) 如图 1.66 所示;

(д) 如图 1.67 所示; (e) 如图 1.68 所示.

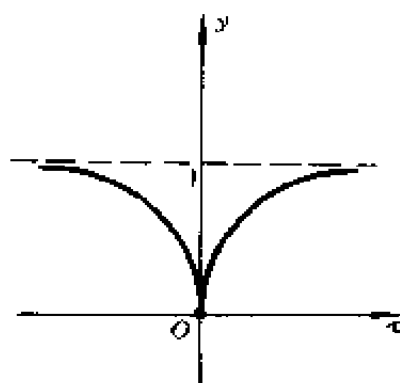


图 1.67

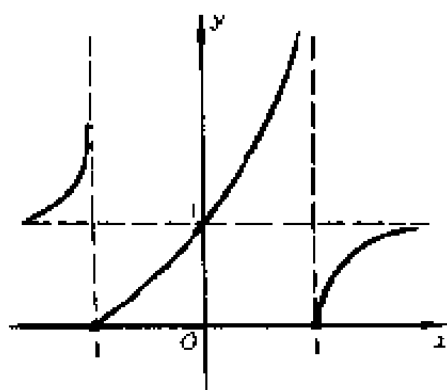


图 1.68

280. 作对数函数 $y = \log_a x$ 当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.69 所示.

281. 作下列函数的图形:

(a) $y = \ln(-x)$; (б) $y = -\ln x$.

解 如图 1.70 所示.

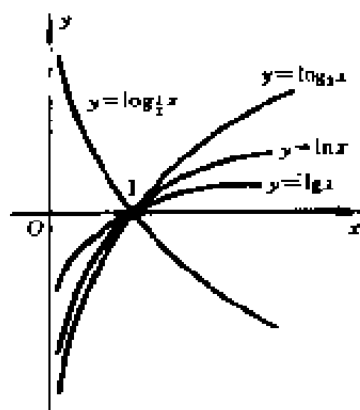


图 1.69

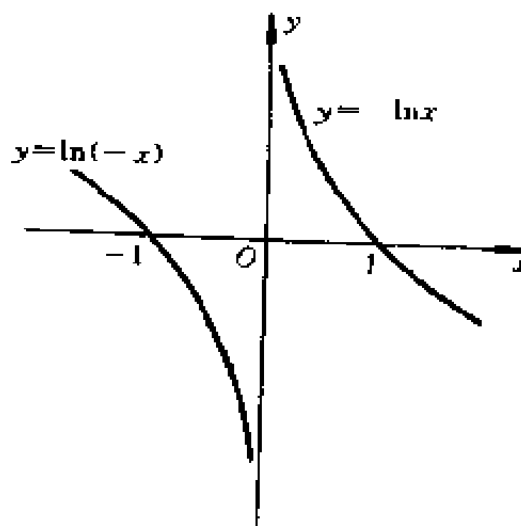


图 1.70

282. 设:

(a) $y_1 = 1 + x^2$; (б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; (г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = 1 + e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图形.

解 (a) 如图 1.71 所示;

(6) 存在域: $x > 3$ 或 $x < 1$.

$y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$, 将此三个函数的图形叠加即得, 如图 1.72 所示;

(B) $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, 将 $y = \ln(1-x)$ 及 $y = -\ln(1+x)$ 的图形叠加即得, 如图 1.73 所示 ($-e < x < 1$);

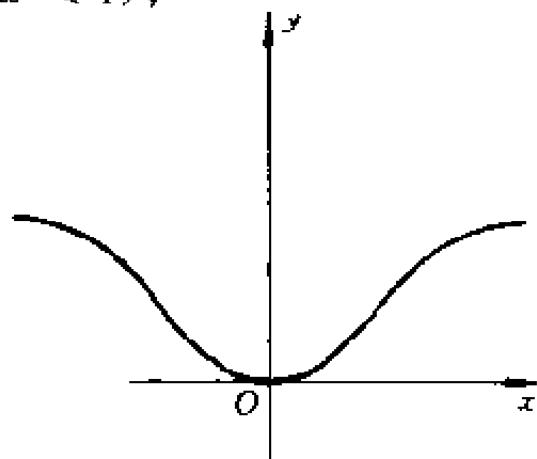


图 1.71

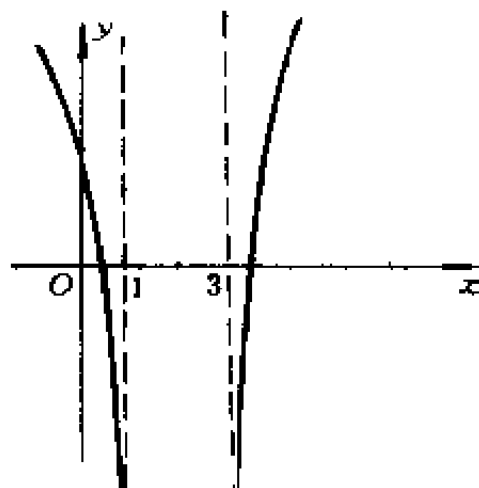


图 1.72

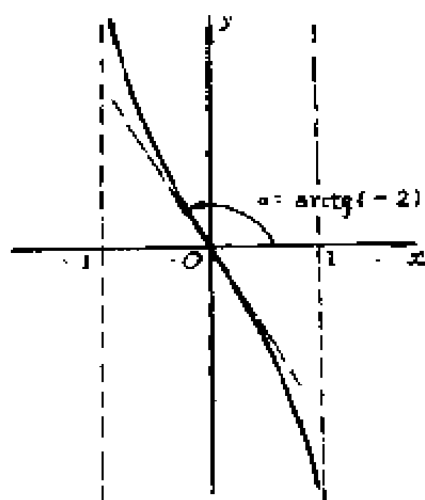


图 1.73

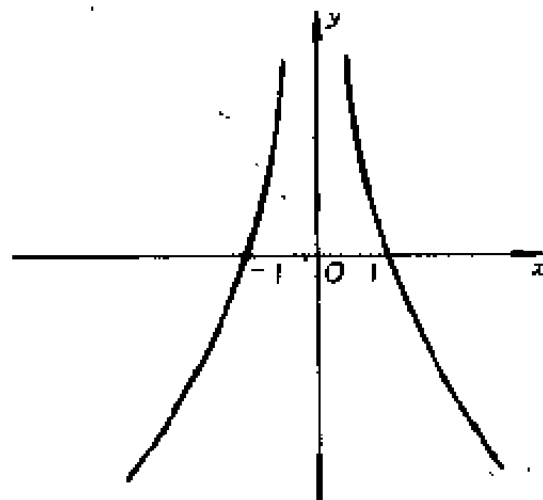


图 1.74

(r) $y = \ln \frac{1}{x^2}$, 如图 1.74 所示, 图形关于 Oy 轴对称;

(2) 如图 1.75 所示.

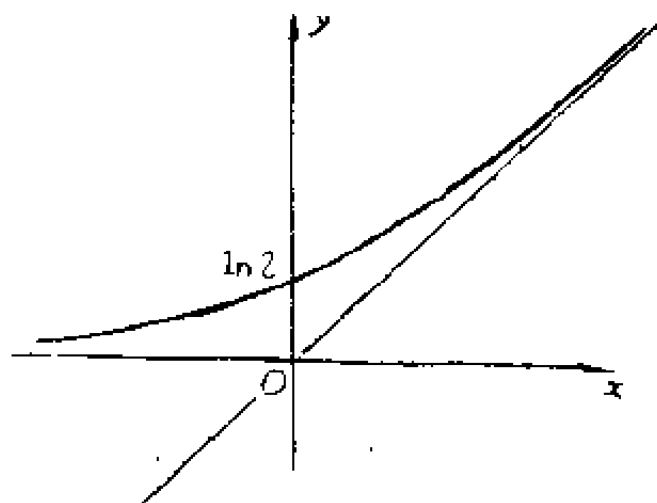


图 1.75

283. 作函数

$$y = \log_x 2$$

的图形

解 如图 1.76 所示.

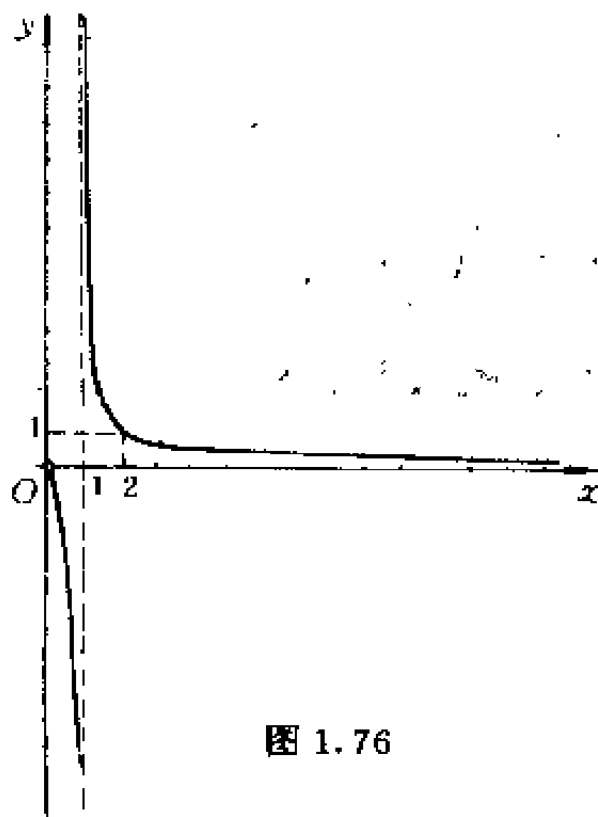


图 1.76

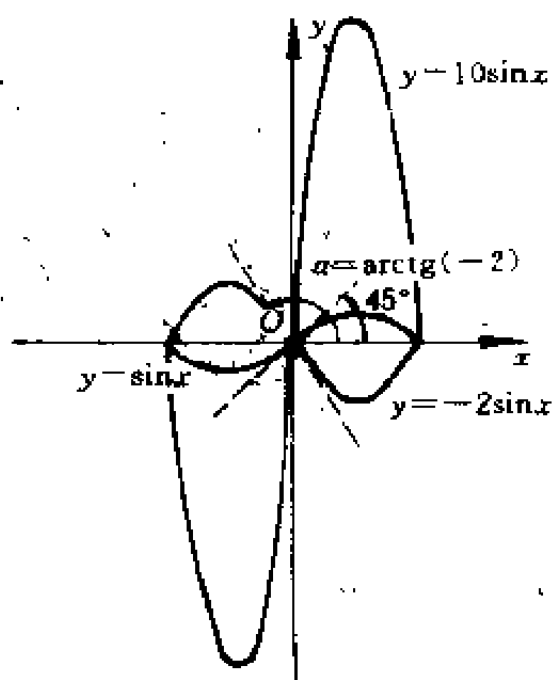


图 1.77

284. 作函数

$$y = A \sin x$$

当 $A = 1, 10, -2$ 时的图形.

解 如图 1.77 所示.

285. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

当 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形.

解 只要将 $y = \sin x$ 的图形向右平移距离 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得, 如图 1.78 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 4. $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

5. $y = \sin(x - \pi)$.

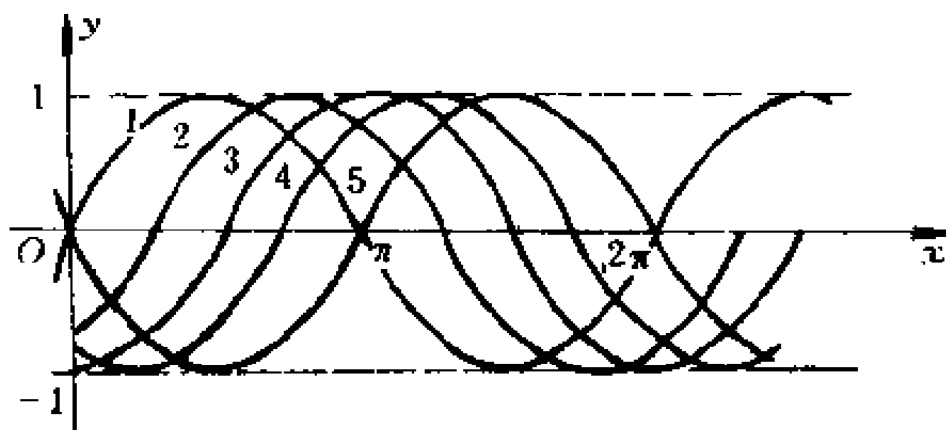


图 1.78

286. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

解 如图 1.79 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin 2x$;

3. $y = \sin 3x$; 4. $y = \sin \frac{1}{2}x$;

5. $y = \sin \frac{1}{3}x$.

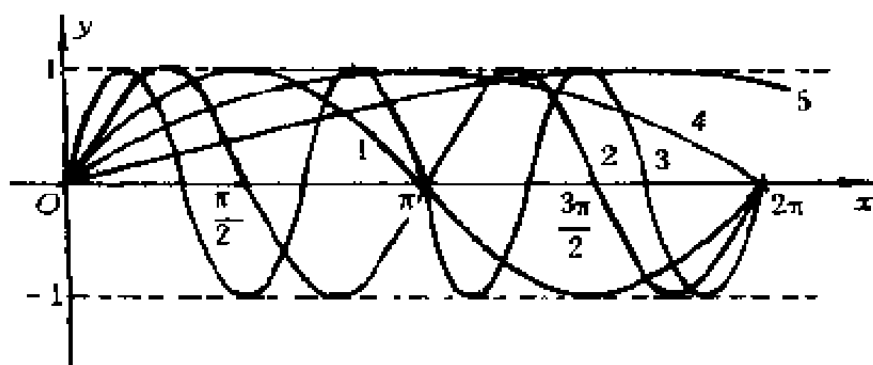


图 1.79

287. 把函数

$$y = a \cos x + b \sin x$$

化为下面的形状

$$y = A \sin(x - x_0),$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = 6 \cos x + 8 \sin x.$$

解 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$

由于

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ 及}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

故可令

$$\sin x_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (1)$$

于是

$$y = A \sin(x - x_0) \quad (2)$$

其中

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \quad (a^2+b^2 \neq 0), x_0 \text{ 适合(1)式.}$$

(2) 式图形是这样作的: 先把正弦曲线 $y = \sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$ (或 $x_0 > 0$ 时, 则向右移; 若 $x_0 < 0$ 时向左移), 然后再从纵轴“伸长” A 倍 (当 $A < 1$ 时为压缩 $\frac{1}{A}$ 倍).

对于例子

$$y = 6\cos x + 8\sin x,$$

$$A = \sqrt{6^2+8^2} = 10,$$

$$\sin x_0 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos x_0 = -\frac{4}{5},$$

$$x_0 = -\arctg \frac{3}{4},$$

如图 1.80 所示.

作下列三角函数的图形:

288. $y = \cos x.$

解 如图 1.81 所示.

289. $y = \operatorname{tg} x.$

解 如图 1.82 所示.

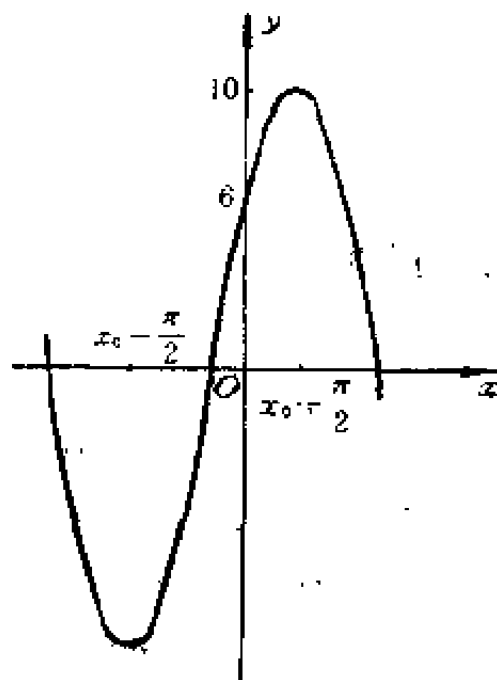


图 1.80

290. $y = \operatorname{ctg} x$.

解 如图 1.83 所示.

291. $y = \sec x$.

解 如图 1.84 所示.

292. $y = \csc x$.

解 如图 1.85 所示.

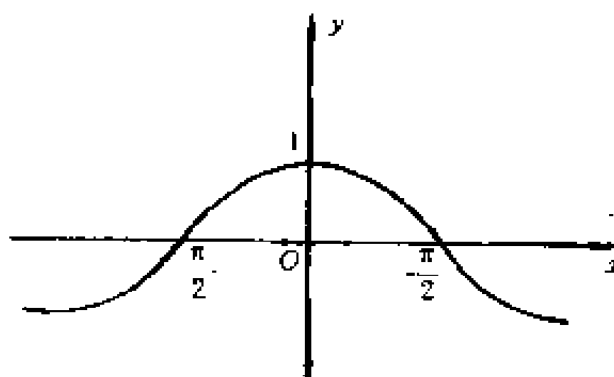


图 1·81

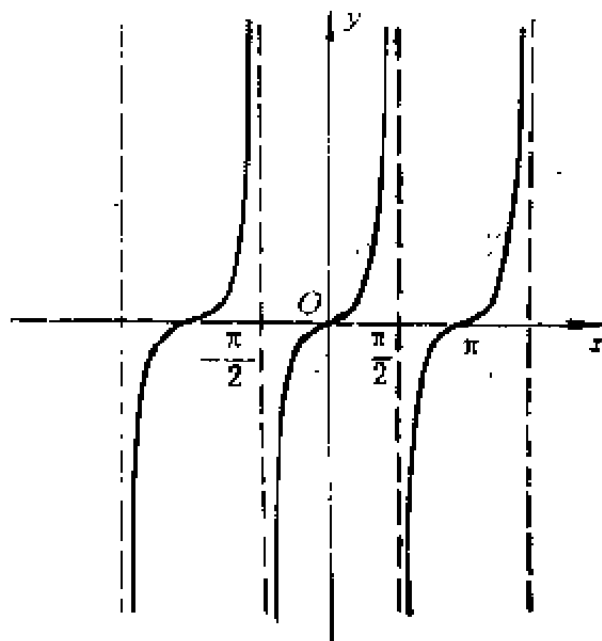


图 1·82

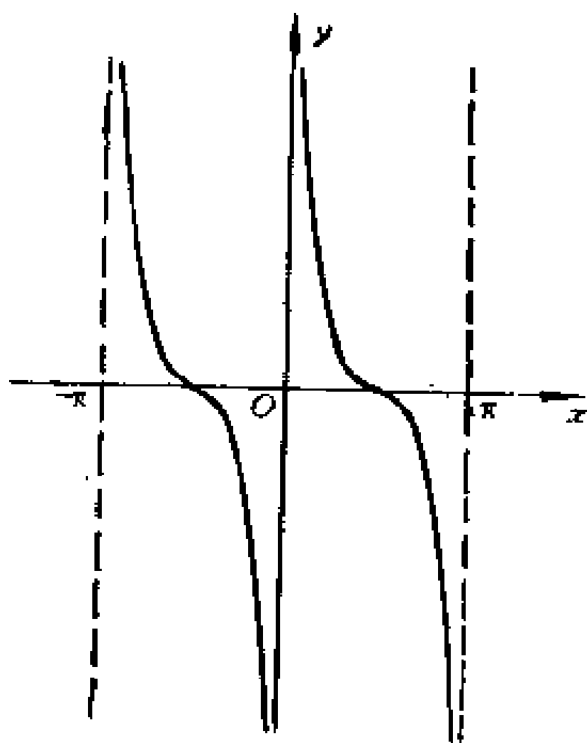


图 1·83

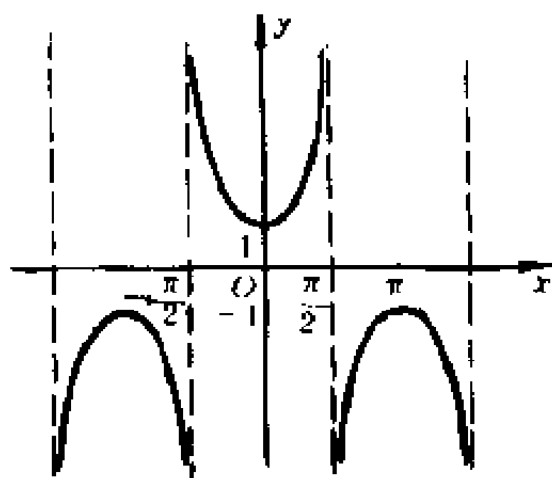


图 1·84

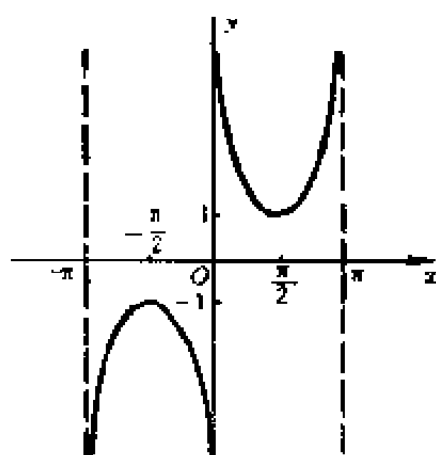


图 1·85

293. $y = \sin^2 x$.

解 如图 1.86 所示.

294. $y = \sin^3 x$.

解 如图 1.87 所示.

295. $y = \operatorname{ctg}^2 x$

解 如图 1.88 所示.

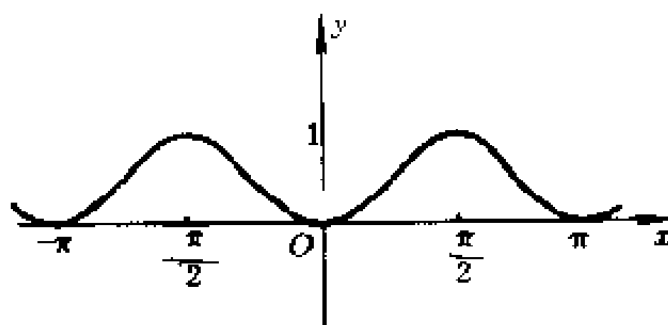


图 1·86

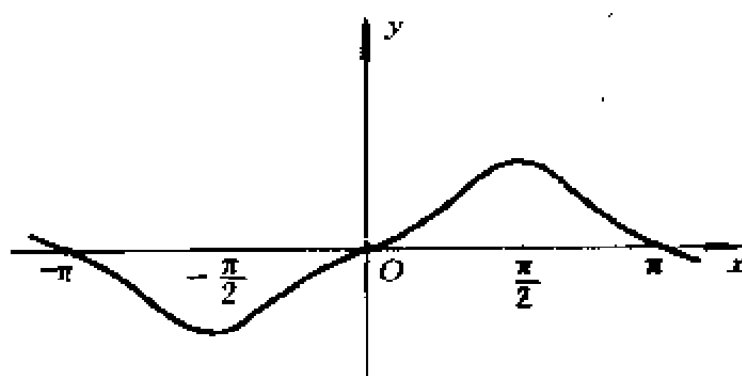


图 1 1·87

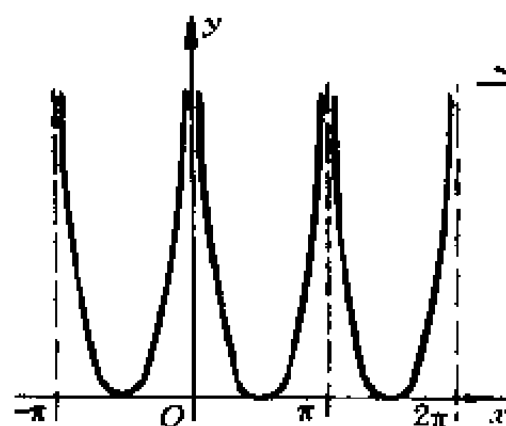


图 1·88

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 π . 将 $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图形叠加即得. 如图 1.89 所示.

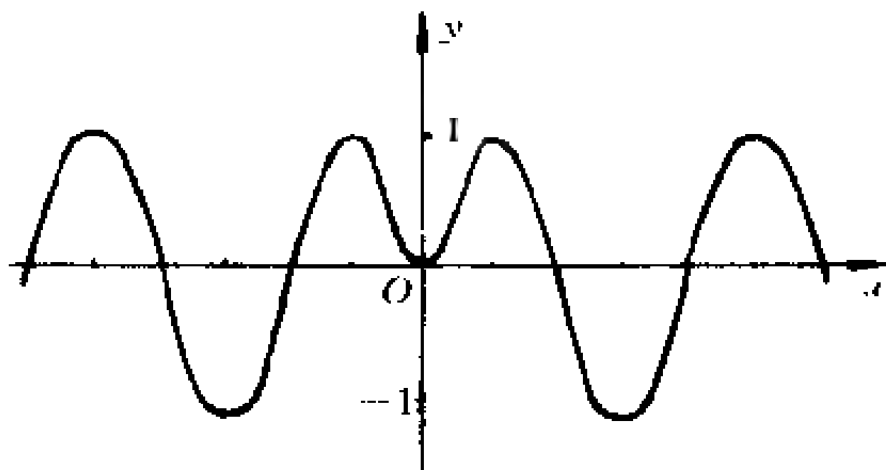


图 1.89

297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

解 图形关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称, 是以 2π 为周期的周期函数, 如图 1.90 所示.

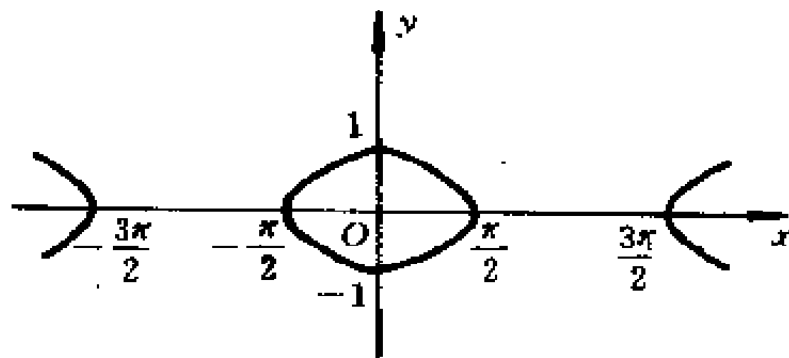


图 1.90

作下列函数的图形:

298. $y = \sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \cdots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}\pi - \sqrt{n\pi}) = 0$, 所以曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2 < x^2$, 我们知道这条曲线位于抛物线 $y = x^2$ 的下方, 如图 1.91 所示.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

解 $-1 \leq y \leq 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $y = 0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\frac{2}{\pi}$ 时, 则 $\frac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$, 而 y 由 0 增到 1; 但当 x 由 $\frac{2}{\pi}$ 减小到 $\frac{2}{3\pi}$, 则 $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$, 而 y 由 1 减小到 -1 . 当 $x = \frac{1}{\pi}$ 时, $y = 0$ 等. 因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于 0 点, 而在点 $x = 0$ 处, 函数 y 没有定义, 如图 1.92 所示.

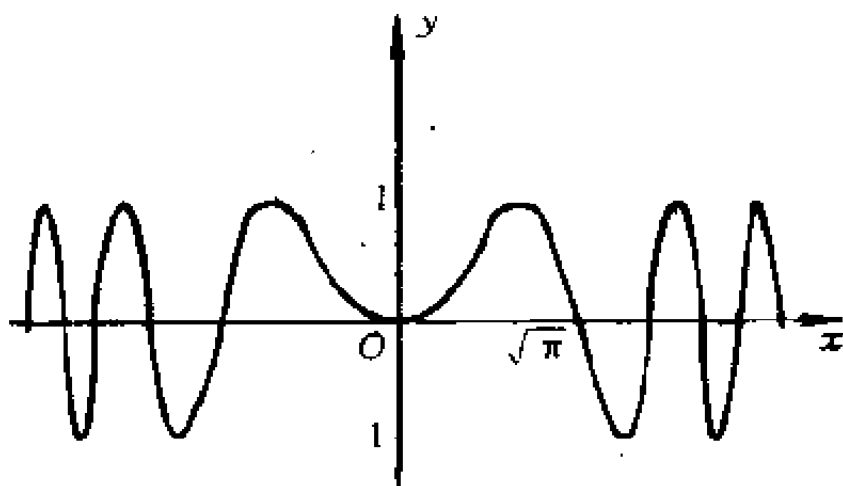


图 1.91

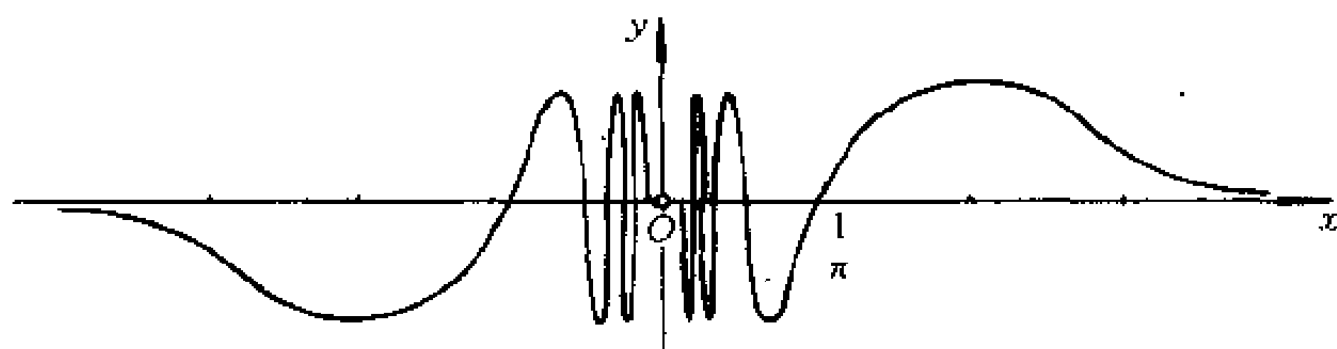


图 1.92

300. $y = x \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $-x \leq y \leq x$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$.

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x > 2$ 时, y 单调增加, 因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称. 而在点 $x = 0$, 函数 y 没有定义.

当 x 无限接近 0 时, 函数作无限次衰减摆动, 并凝聚于 O 点. 如图 1.93 所示.

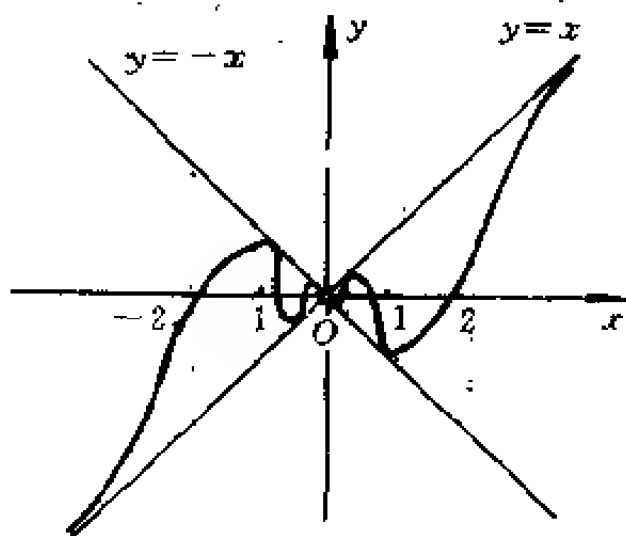


图 1.93

301. $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$.

解 当 $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $x \rightarrow \frac{2}{2k+1} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y \rightarrow \infty$.

当 $x > 2$ 时, $y > 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

因为 y 为奇函数, 故图形关于原点对称.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 图形凝聚于 O 点, 而在点 $x = \frac{2}{2k+1}$ 及 0 , 函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

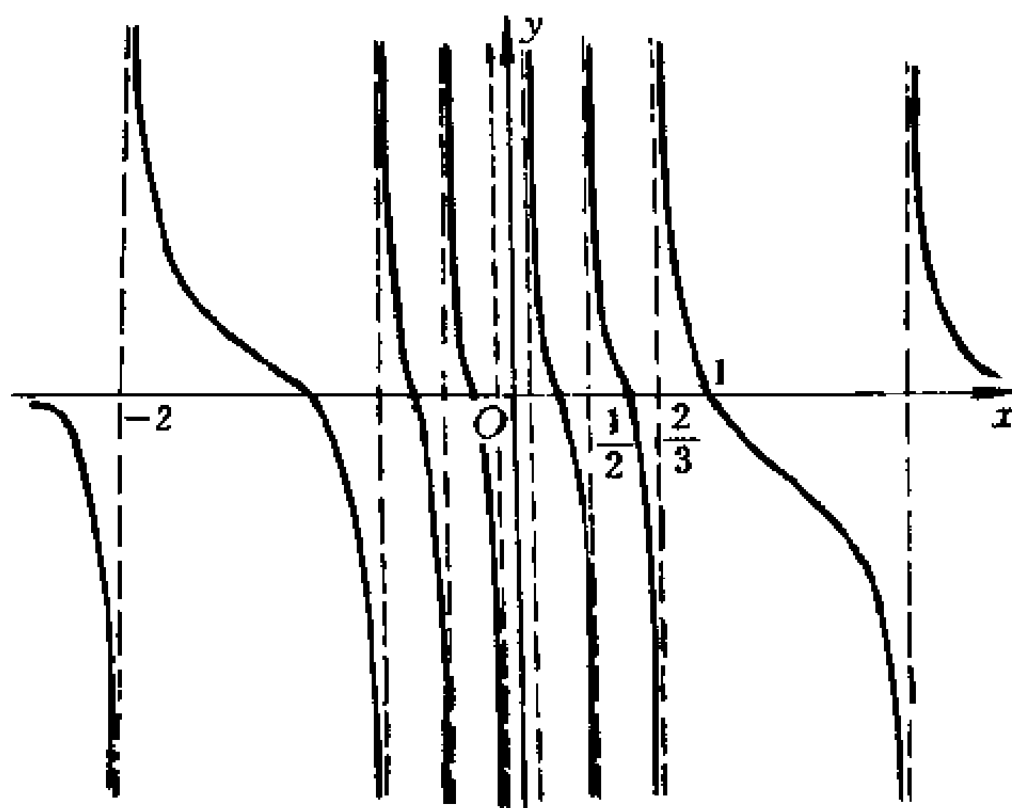


图 1.94

302. $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

解 先作 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形. 因为 y 为偶函数, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = \pm x$.

当 $x = \frac{1}{k\pi} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $x > \frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1^{**}$$

如图 1.95 所示(在点 $x = 0$ 无定义).

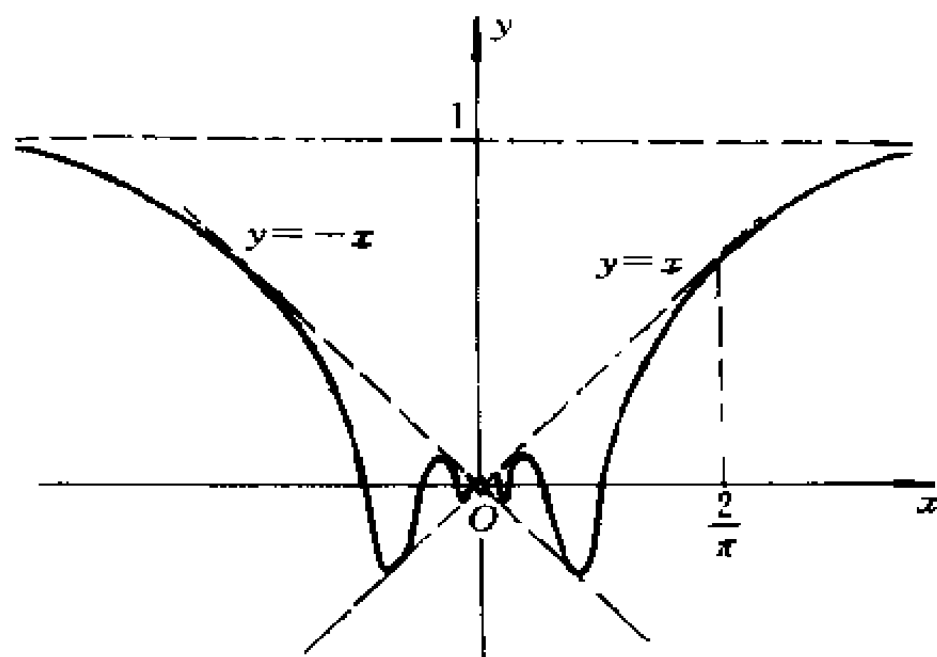


图 1.95

其次, 再将函数 $y = 2x$ 及 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形“叠加”, 即得

$$y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$$

的图形. 如图 1.96 所示.

*) 此结果参看本章 § 5.

303. $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

解 图形关于原点及 Oy 轴, Ox 轴均对称.

由于

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-x^2} &\leq y \\ &\leq \sqrt{1-x^2} \\ (|x| &\leq 1), \end{aligned}$$

故图形位于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内.

将函数 $y = \pm \sqrt{1-x^2}$

与 $y = \sin \frac{\pi}{x}$ 的纵坐标

对应相乘, 即可描出
所求的图形.

如图 1.97 所示.

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$. 由于 $|y| \leq \frac{1}{|x|}$,

故图形在 $y = -\frac{1}{x}$

及 $y = \frac{1}{x}$ 之间. 又图形关于 Oy 轴对称. 当 $x = k\pi$ 时, $y =$

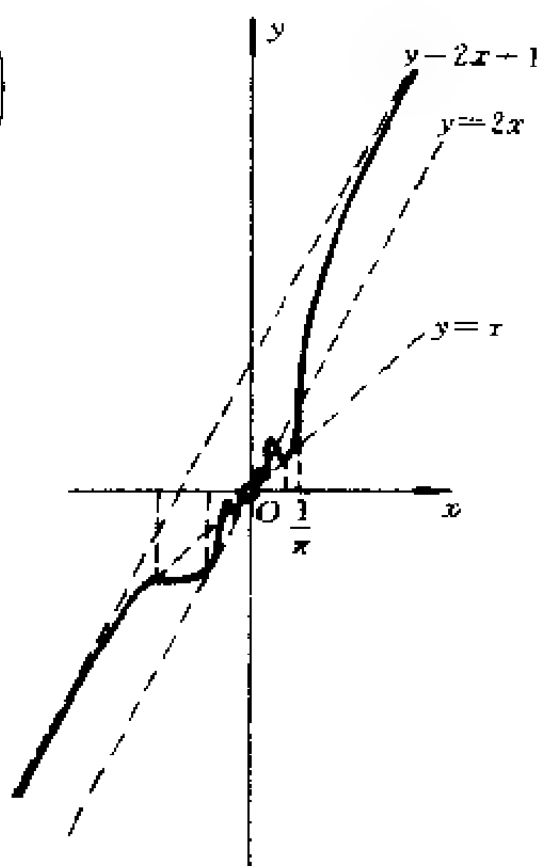


图 1.96

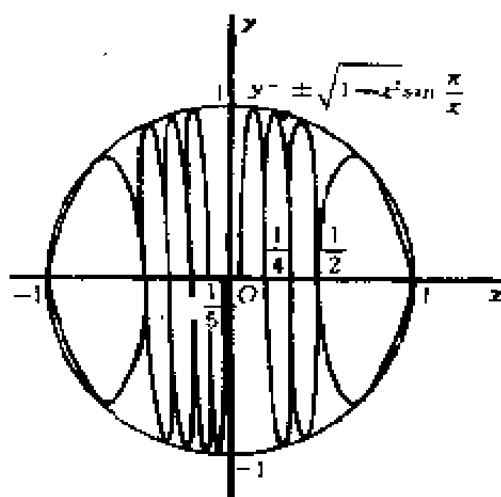


图 1.97

$0(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

如图 1·98 所示.

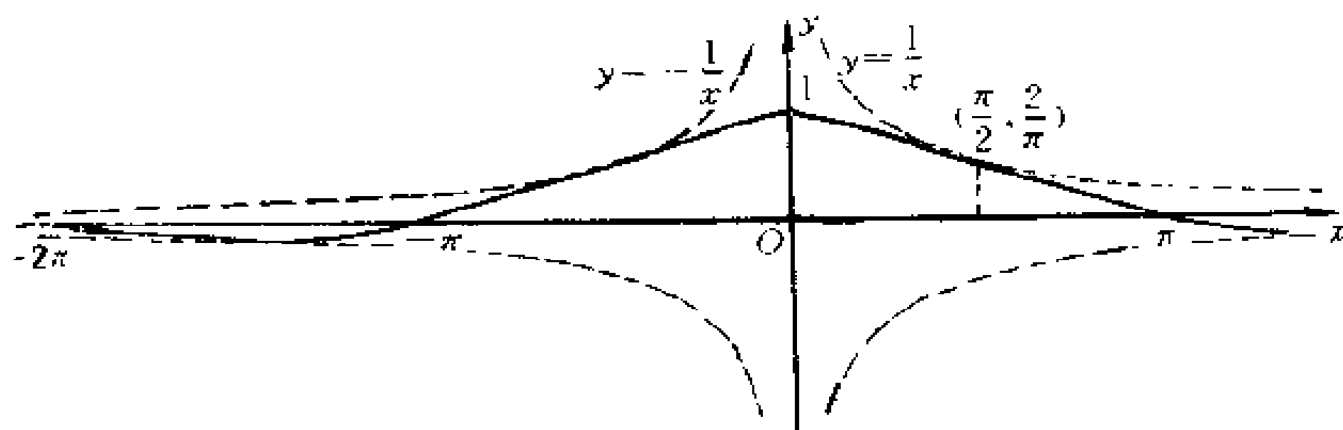


图 1·98

305. $y = e^x \cos x$.

解 由于 $-e^x \leq y \leq e^x$, 故图形在 $y = e^x$ 及 $y = e^{-x}$ 之间.

当 $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$. 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cos x$ 却不存在.

如图 1.99 所示.

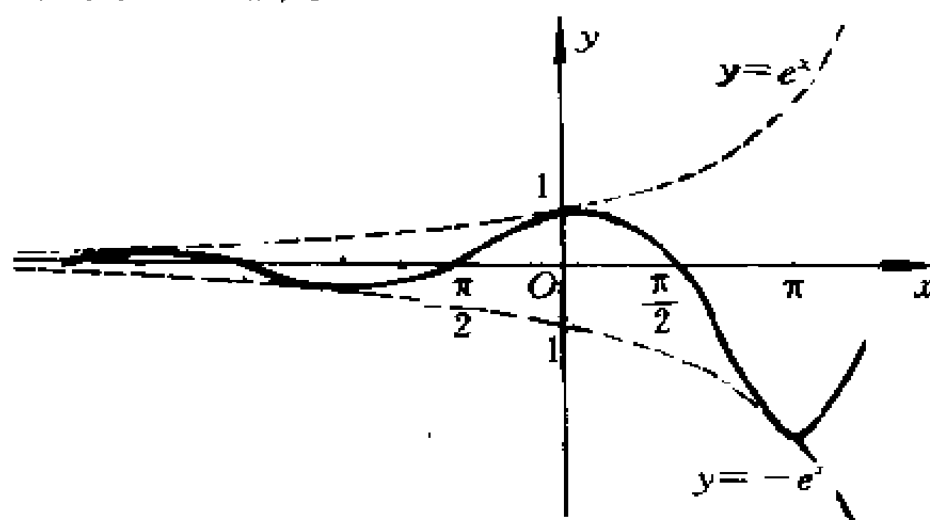


图 1.99

306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

解 当 $2k \leq x \leq (2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) 时, y 值才确定. 当 $k = 2k + \frac{1}{2}$ 时, $y = \pm 2^{-x}$.

图形关于 Ox 轴对称. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ 不存在.

如图 1·100 所示.

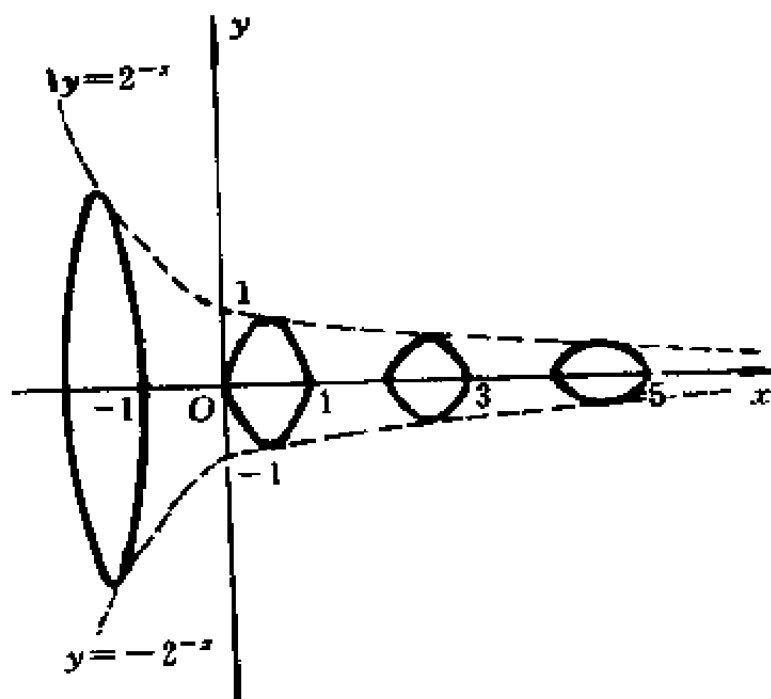


图 1·100

307. $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$,

图形在 $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 之间, 且关于 Oy 轴对称.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

如图 1·101 所示.

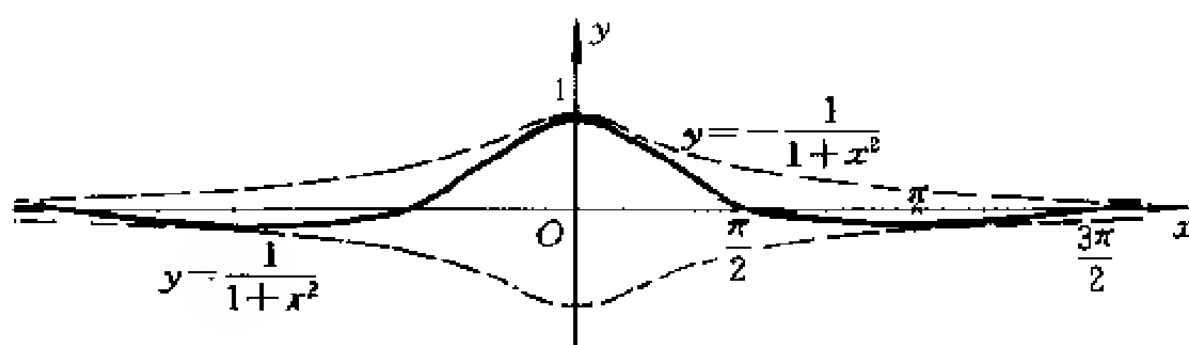


图 1.101

308. $y = \ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x > 0$ 的开区间

$$\left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ 内, y 单调增加, 且 $y < 0$. 在 $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 内, y 单调

减小, $y < 0$. 最大值是 $y = \ln \cos 0 = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = -\infty$. 如图 1.102 所示.

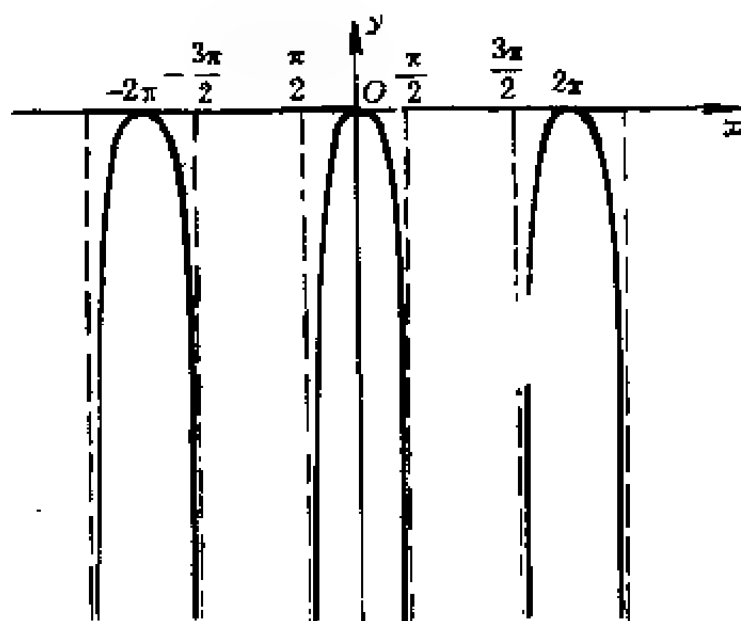


图 1.102

309. $y = \cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x > 0$ 的全体.

当 $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x = e^{2k\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 1$;

而当 $x = e^{(2k+1)\pi}$ 时, $y = -1$.

图形始终在直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间摆动, 而且越靠近原点时, 摆动越密.

如图 1.103 所示. (两轴所取的单位不一致).

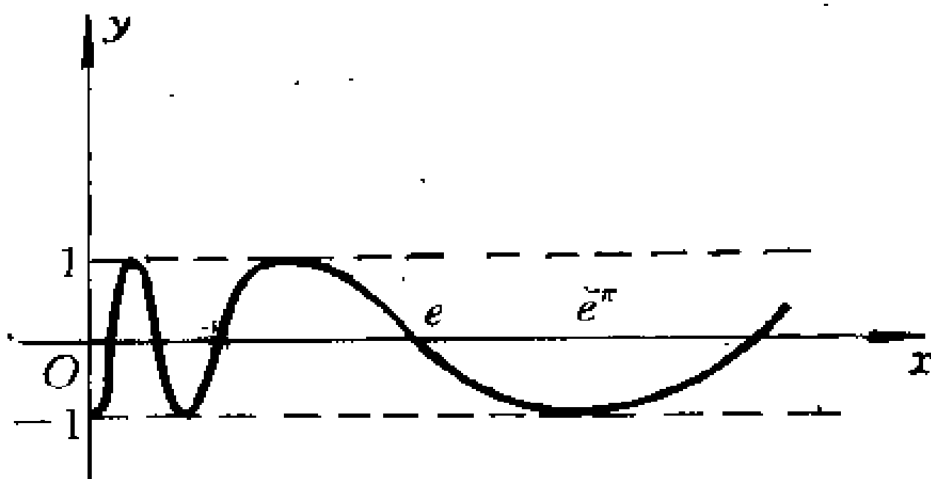


图 1.103.

310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y > 0$.

函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, y 单调增加. 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} y = +\infty.$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 为区间 $(0, \pi)$ 内, 函数 y 的最小值.

同理, x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 由 0 增到 $\frac{1}{e}$; 而 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} y = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} y = 0$.

如图 1·104 所示.

作下列反三角函数的图形:

311. $y = \arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

312. $y = \arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

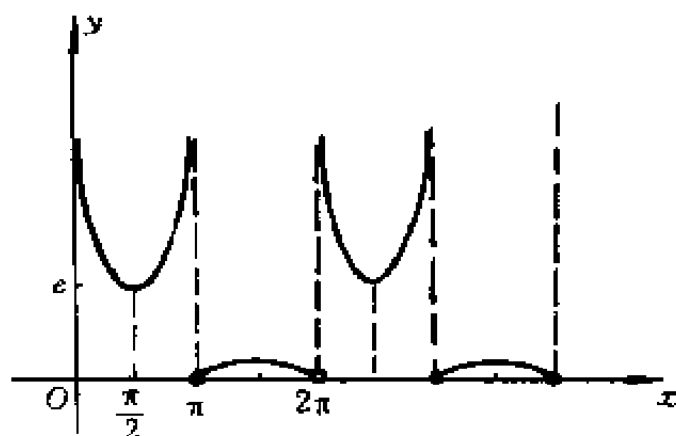


图 1·104

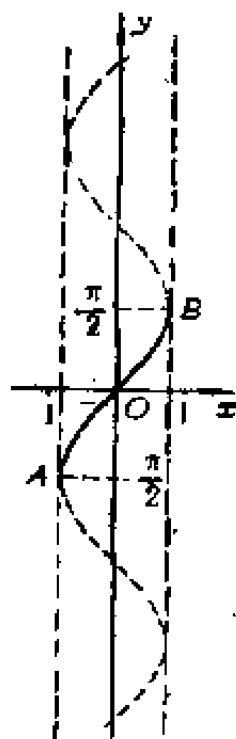


图 1·105

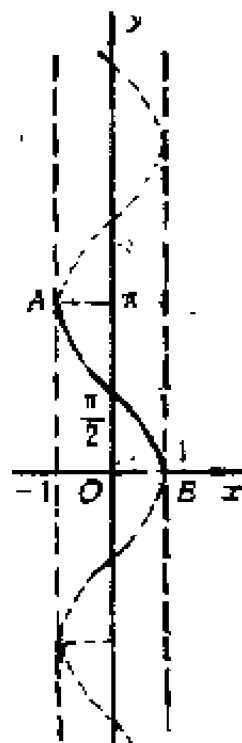


图 1·106

313. $y = \operatorname{arctg} x.$

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

314. $y = \operatorname{arcctg} x.$

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

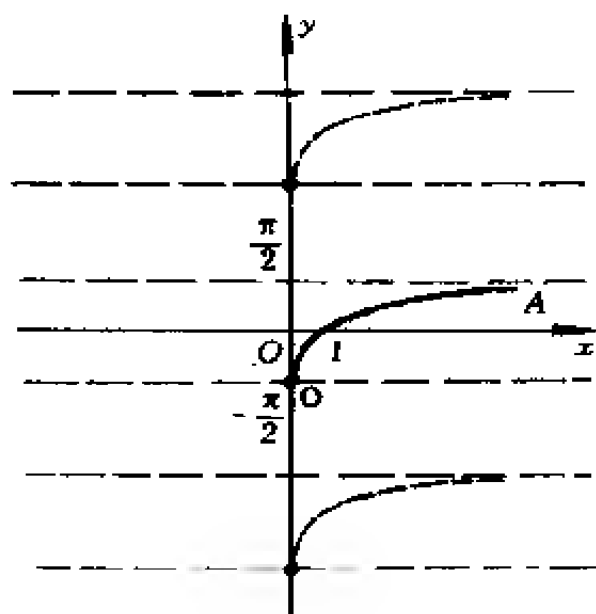


图 1.107

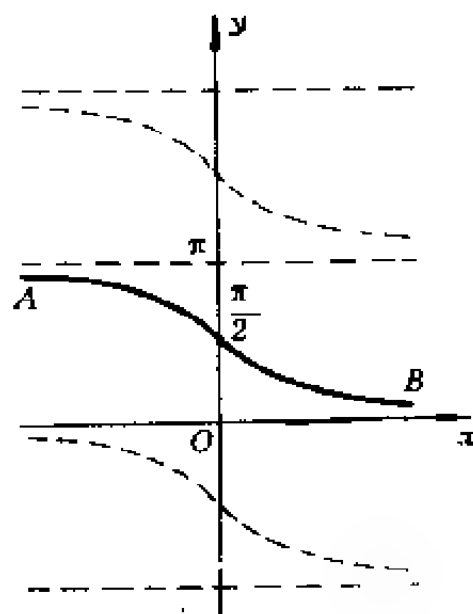


图 1.108

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}.$

解 图形关于原点对称.

存在域是区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 也是减函数, 且有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} y &= \frac{\pi}{2} \\ &= y|_{x=1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y \\ &= 0. \end{aligned}$$

如图 1.109 所示.

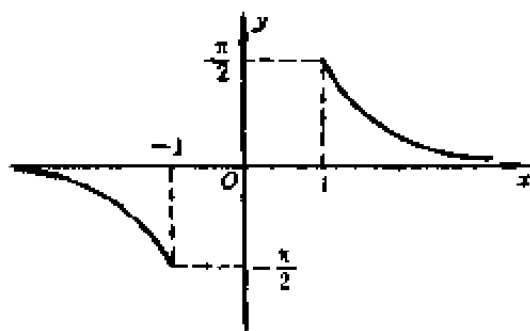


图 1.109

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

解 存在域是区间 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是增函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

同理, 当 $-\infty < x \leq -1$ 时, y 单调增加; 且有

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

如图 1·110 所示.

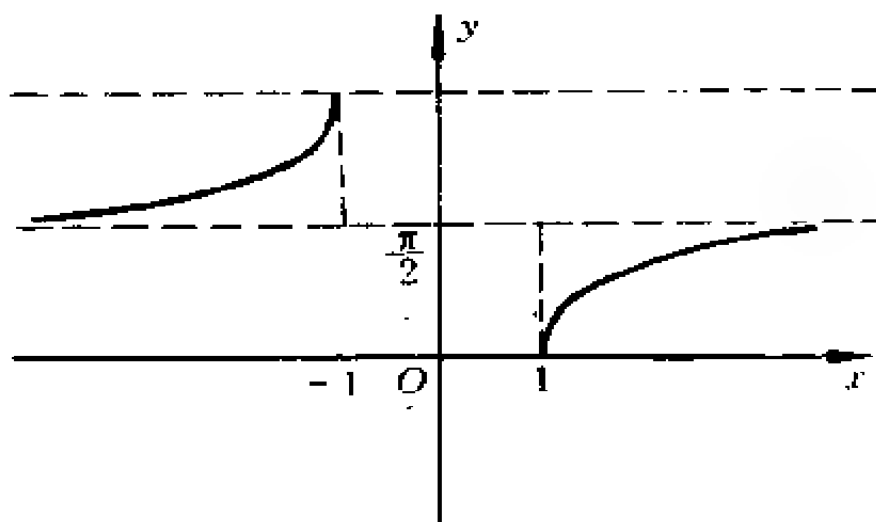


图 1·110

317. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x > 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0.$$

如图 1·111 所示.

318. $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $\sin y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = \pi - x$;

当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 时, $y = x - 2\pi$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$;

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

而当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = (\pi - x) + 2k\pi$.

如图 1·112 所示.

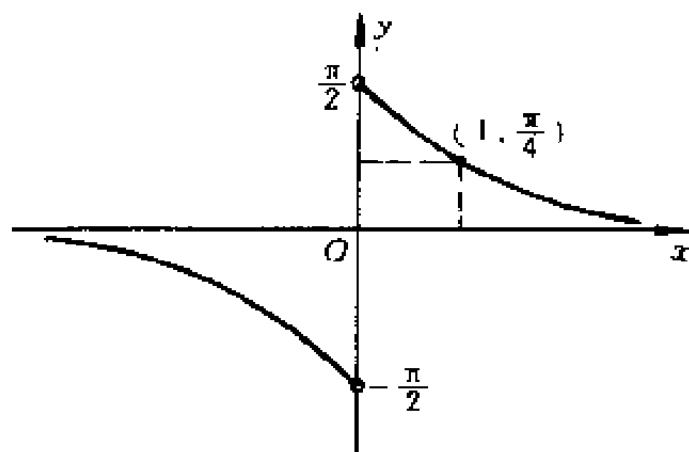


图 1·111

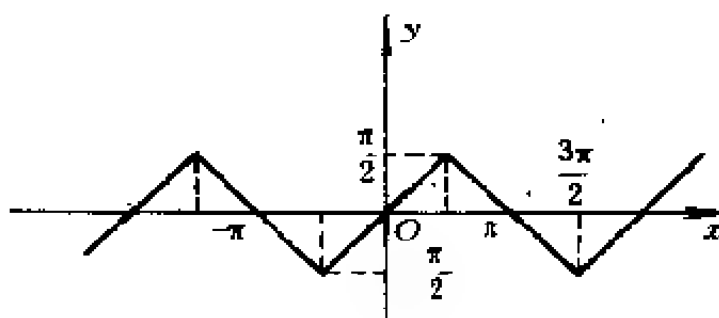


图 1·112

319. $y = \arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = \frac{\pi}{2} + x$;

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = \frac{\pi}{2} - x$.

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi$
 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$.

如图 1·113 所示.

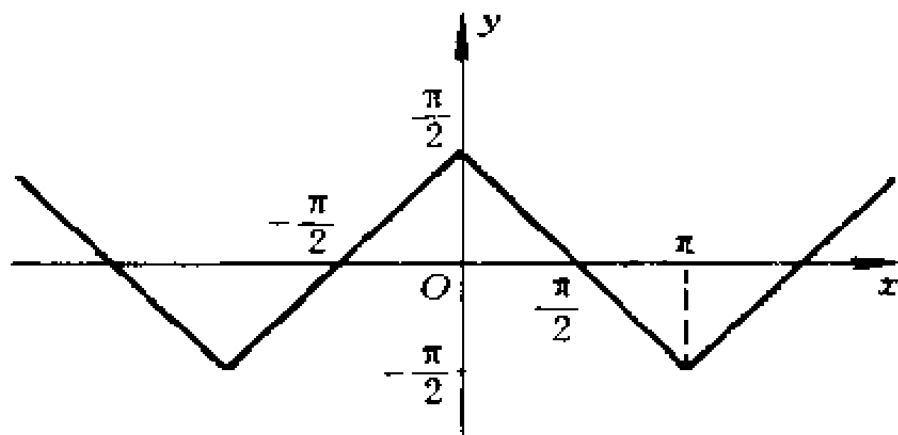


图 1·113

320. $y = \arccos(\cos x)$.

解 $\cos y = \cos x, 0 \leq y \leq \pi$.

因此, 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = x$;

当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时, $y = 2\pi - x$;

当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = -x$.

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = -x + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$.

如图 1·114 所示.

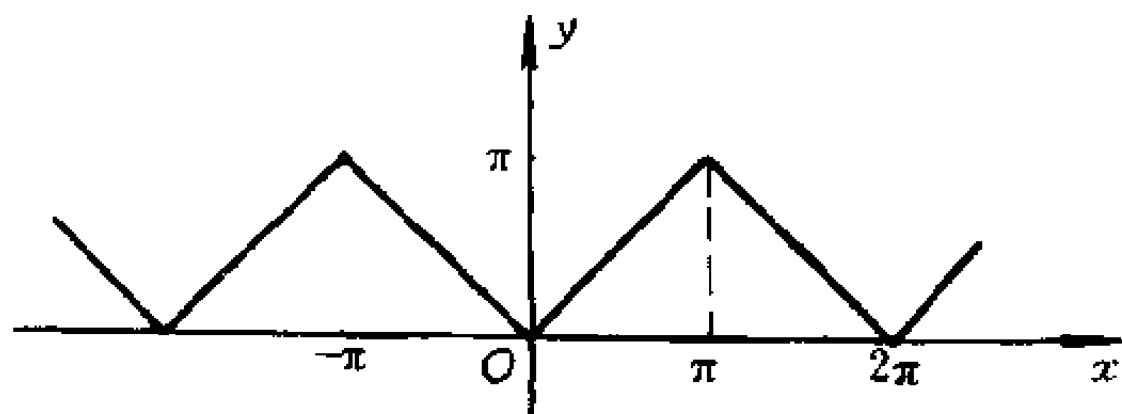


图 1·114

321. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

解 $\operatorname{tgy} = \operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x - \pi$;

当 $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $y = \pi + x$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时, $y = x - k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

如图 1·115 所示.

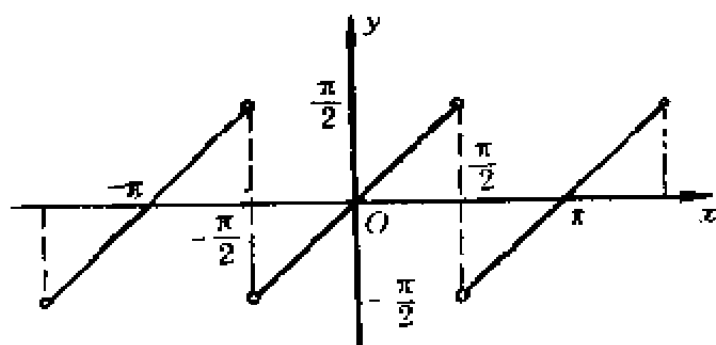


图 1.115

322. $y = \arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y = 2\sin x$, $-\frac{2}{\pi} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

存在域为区间:

$$\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \dots$$

的全体, 即 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

的全体.

利用复合函数作图法得其图形, 如图 1.116 所示, 它关于原点对称.

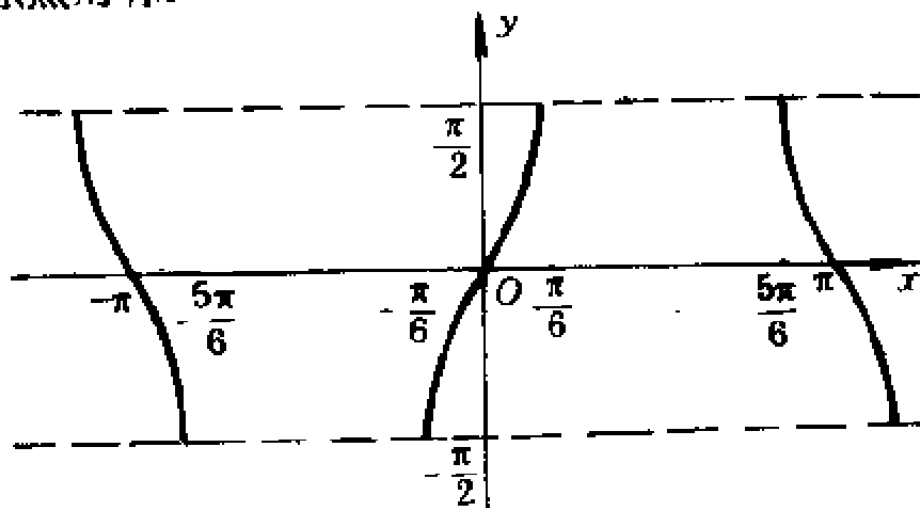


图 1.116

323. 设

$$(a) y_1 = 1 - \frac{x}{2}; \quad (b) y_1 = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(c) y_1 = \frac{1-x}{1+x}; \quad (r) y_1 = e^x.$$

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形.

解 (a) 存在域
为满足不等式

$$0 \leq x \leq 4$$

的数 x 的集合.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时,

y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0;

而当 $2 \leq x \leq 4$ 时,

y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$.

如图 1·117 所示.

(b) 图形关于原点对称. 存在域为全体实数.

当 x 由 0 增到 1

时, 由于 $\frac{2x}{1+x^2}$

为增函数, 故 y 由

0 增到的 $\frac{\pi}{2}$. 而当

$x > 1$ 时, $\frac{2x}{1+x^2}$ 为减函数, 故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$

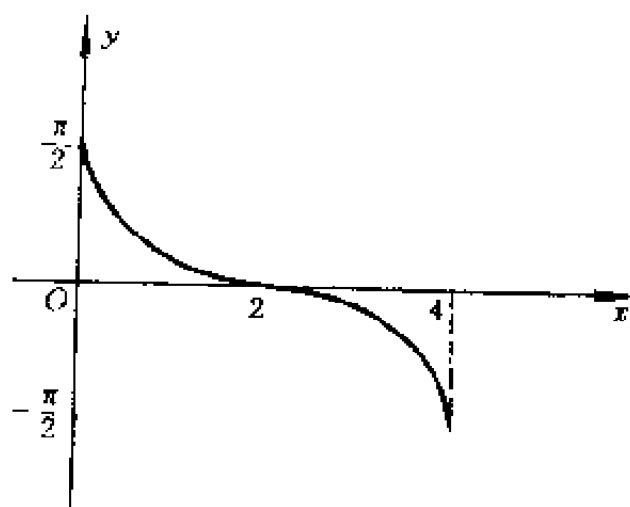


图 1·117

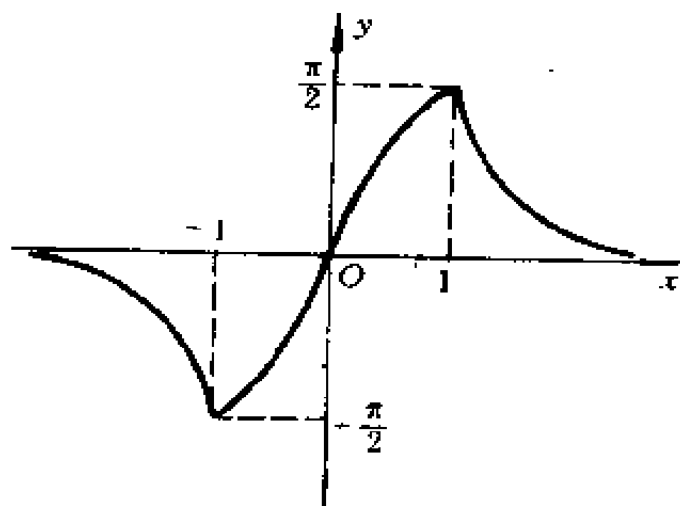


图 1·118

$= 0$. 如图 1·118 所示.

(b) 要 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1$, 只要 $x \geq 0$, 故存在域为 $x \geq 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 0 增到 1 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0; 而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1 , 而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{\pi}{2}$. 如图 1·119 所示.

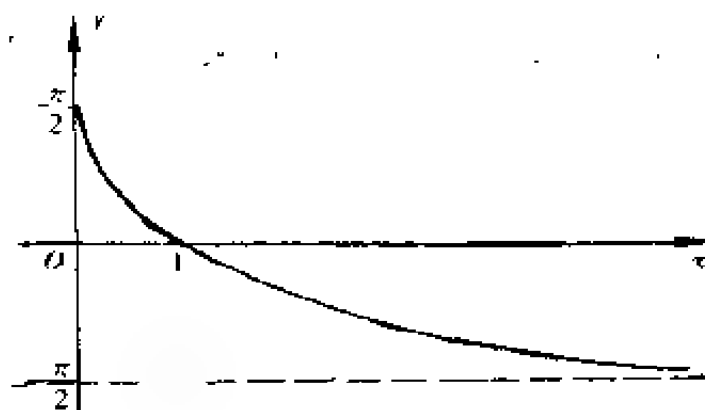


图 1·119

(c) 存在域为 $-\infty < x \leq 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时, e^x 由 0 增到 1, 而 y 则由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$. 如图 1·120 所示.

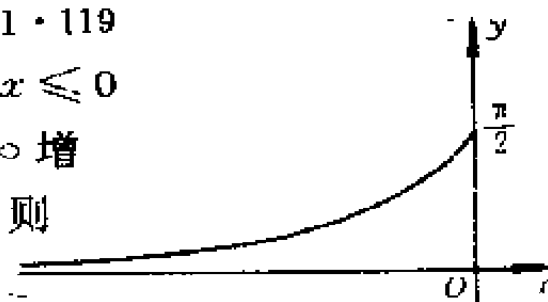


图 1·120

324. 设

$$(a) y_1 = x^2; (b) y_1 = \frac{1}{x^2};$$

(B) $y_1 = \ln x$; (r) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

作函数

$$y = \operatorname{arctg} y_1$$

的图形.

解 (a) 如图 1·121 所示的 AB 曲线.

(b) 如图 1·122 所示.

(B) 如图 1·123 所示的 OA 曲线.

(r) 以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$

减到 1, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减到 $\frac{\pi}{4}$. 余类推, 如图 1·124 所示.

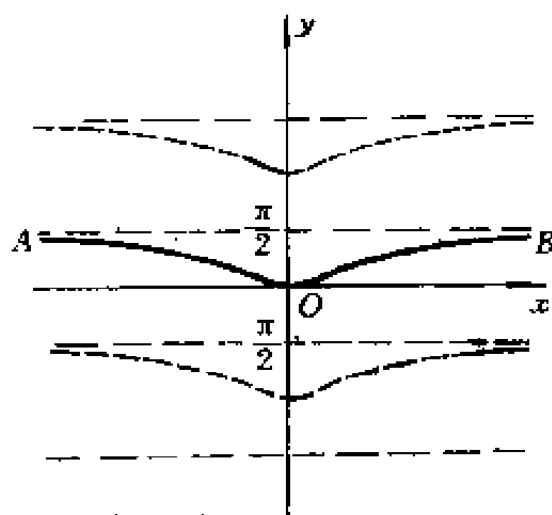


图 1·121

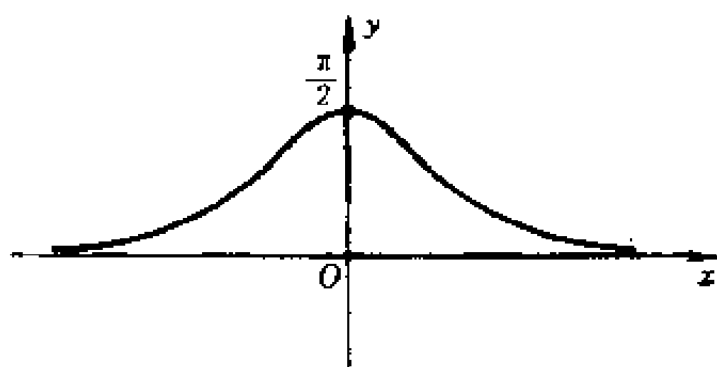


图 1·122

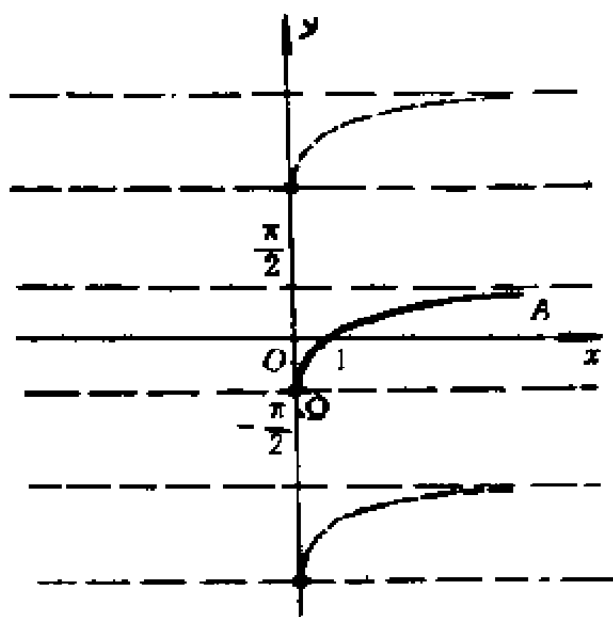


图 1 · 123

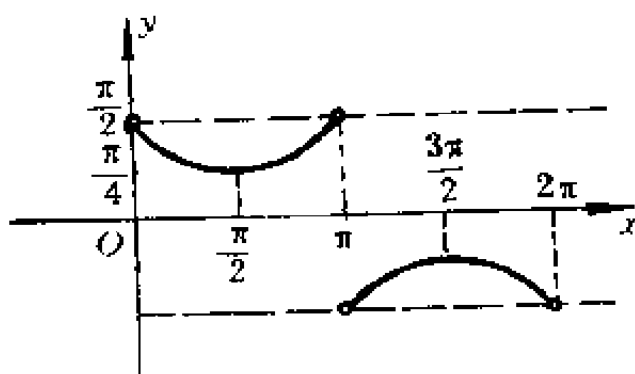


图 1 · 124

325. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形，
作下列各函数的图形

(a) $y = -f(x)$;

(b) $y = f(-x)$;

(c) $y = -f(-x)$.

解 (a) 函数 $y = -f(x)$

的图形和函数 $y = f(x)$

的图形关于 Ox 轴

对称. 如图 1 · 125

所示.

(b) 函数 $y =$

$f(-x)$ 的图形和

函数 $y = f(x)$ 的

图形关于 Oy 轴

对称. 如图 1 · 126 所示.

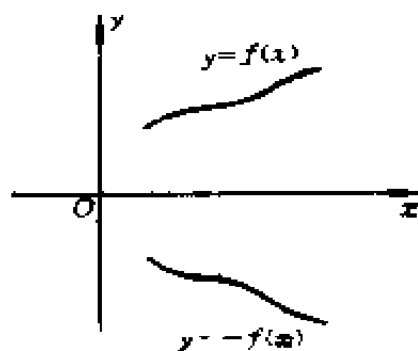


图 1 · 125

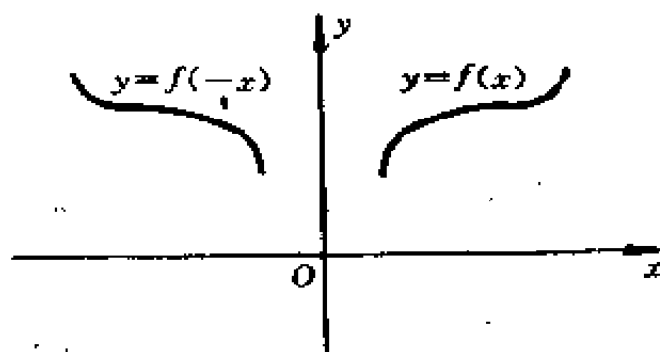


图 1 · 126

(v) 函数 $y = -f(-x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称. 如图 1·127 所示.

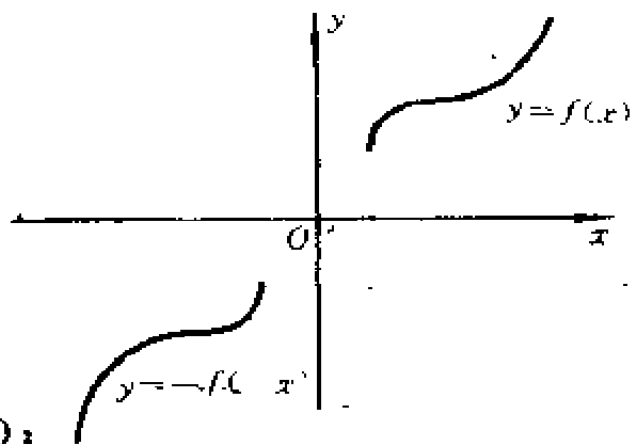


图 1·127

326. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列各函数的图形:

(a) $y = f(x - x_0)$;

(b) $y = y_0 + f(x - x_0)$;

(c) $y = f(2x)$;

(r) $y = f(kx + b)$

($k \neq 0$)

解 (a) 函数 $y = f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$ 得出.

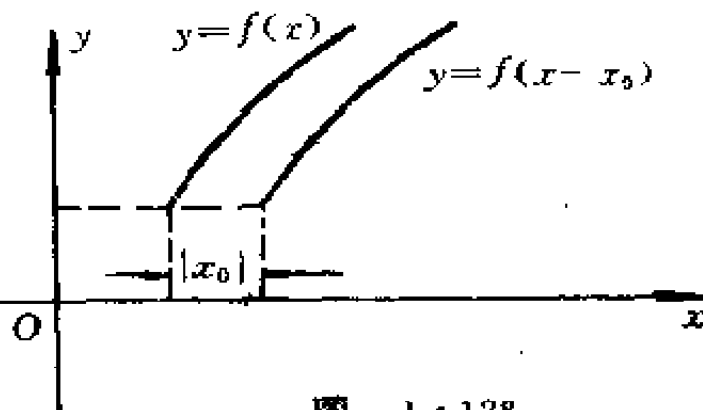


图 1·128

当 $x_0 > 0$ 时, 向右平移;

当 $x_0 < 0$ 时, 向左平移.

如图 1·128 所示.

(b) 函数 $y = y_0 + f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先平移距离 $|x_0|$, 再上下平移距离 $|y_0|$ 得出, 其中

当 $y_0 > 0$ 时, 向上平移;

当 $y_0 < 0$ 时, 向下平移.

事实上, 只要先将坐标原点平移到点 (x_0, y_0) . 坐标轴的

方向均不变,再在新坐标系中作 $y' = f(x')$ 的图形,其中 $y' = y - y_0, x' = x - x_0$.

图形如图 1·129 所示.

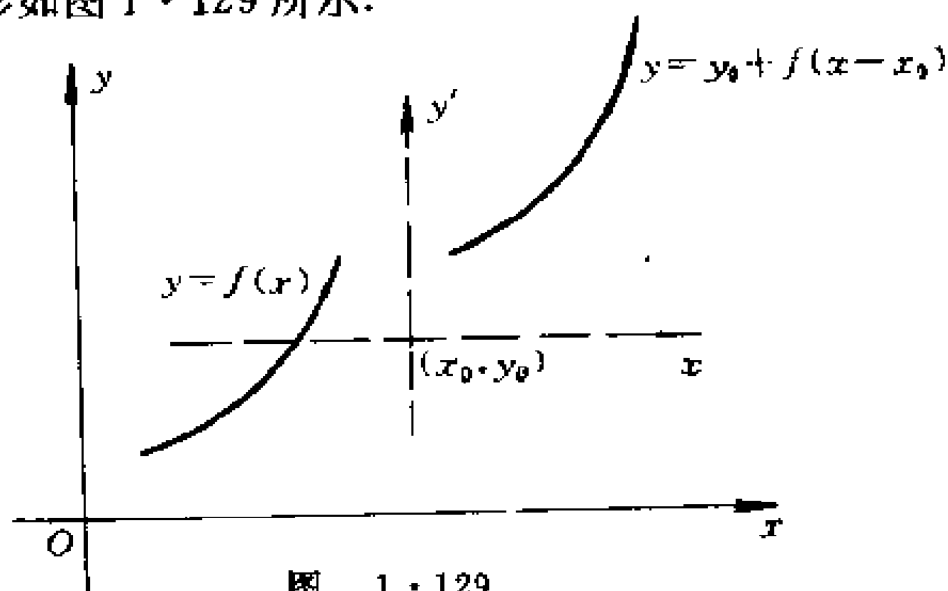


图 1·129

(B) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

图形如图 1·130 所示.

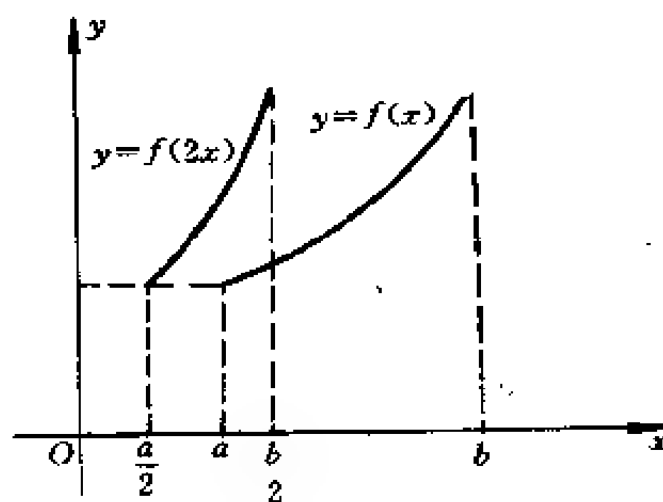


图 1·130

(Γ) $y = f(kx + b)$

的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向“压缩” k 倍 ($0 < k < 1$ 时, 理解为“放大”). 然后再将所得图形平移距离 $|b|$.

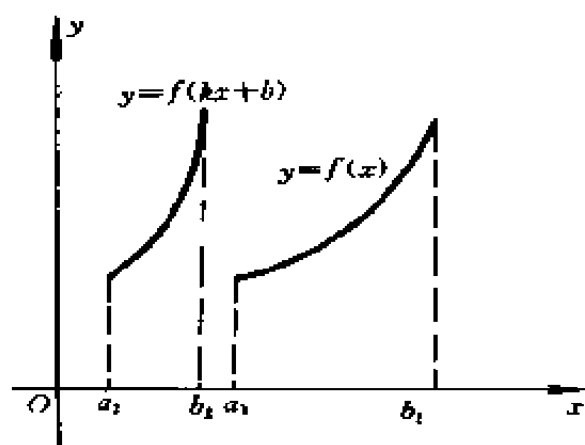


图 1.131

图形如图 1.131 所示.

327. 作函数的图形

(a) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; (б) $y = 1 - e^{-x}$;

(в) $y = \ln(1+x)$. (г) $y = -\frac{\pi}{2} \arcsin(1+x)$;

(д) $y = 3 + 2\cos 3x$.

解 (a) 如图 1.132 所示.

(б) 如图 1.133 所示.

(в) 如图 1.134 所示.

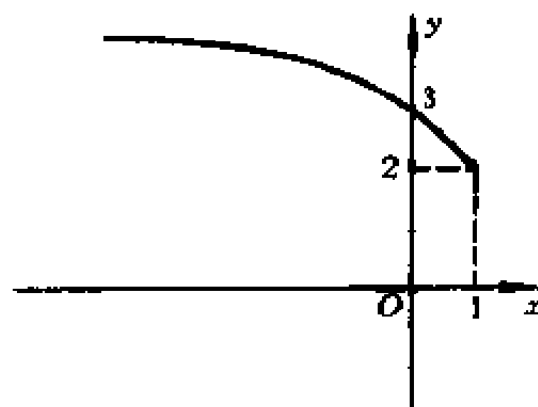


图 1.132

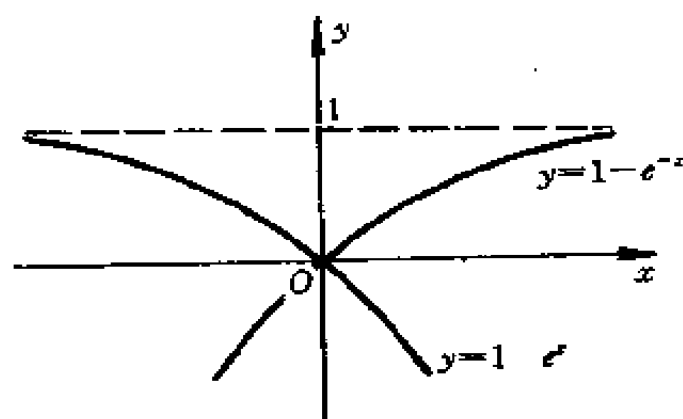


图 1.133

(г) 如图 1.135 所示的 AB 曲线.

(π) 如图 1·136 所示.

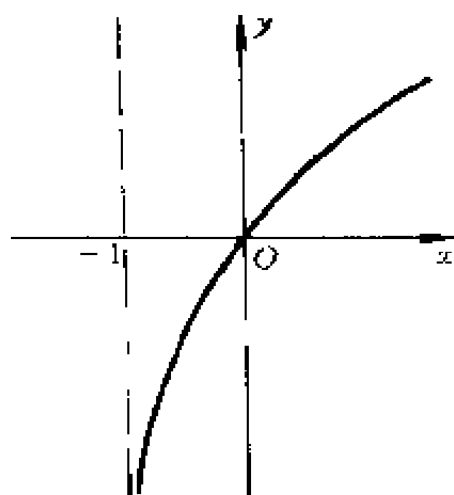


图 1·134

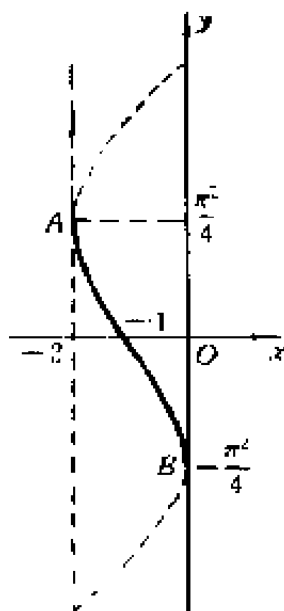


图 1·135

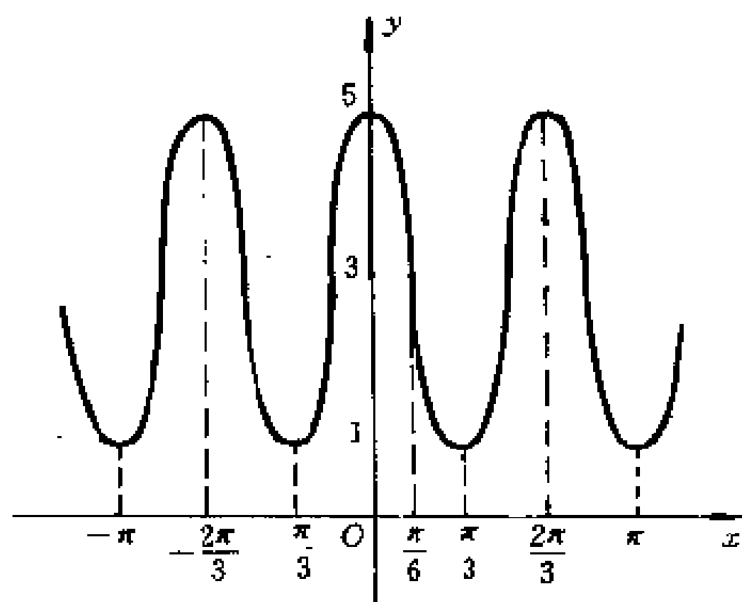


图 1·136

328. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = |f(x)|$; (6) $y = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)]$;

$$(B) y = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)].$$

解 (a) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$;

如图 1·137 黑粗线所示.

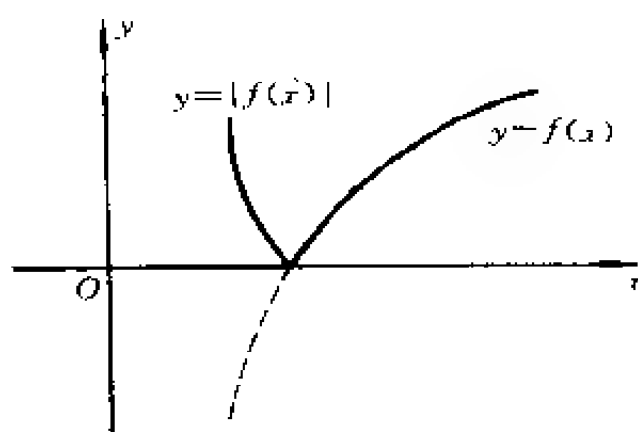


图 1·137

(6) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = 0$.

如图 1·138 黑粗线所示.

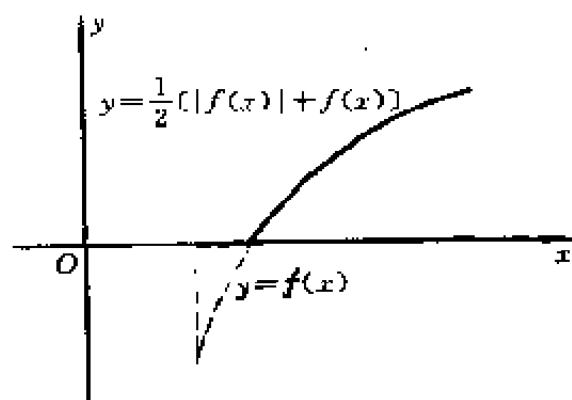


图 1·138

(B) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = 0$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$.

如图 1·139 黑粗线所示.

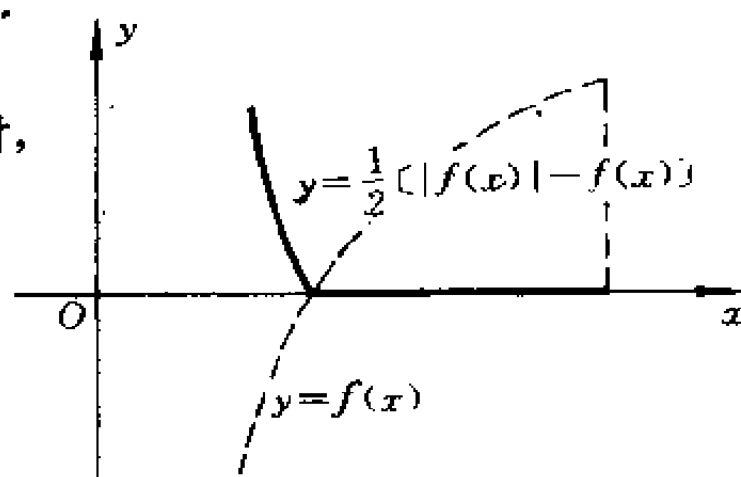


图 1·139

329. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = f^2(x)$; (6) $y = \sqrt{f(x)}$;

(B) $y = \ln f(x)$; (r) $y = f[f(x)]$;

(д) $y = \operatorname{sng} f(x)$; (е) $y = [f(x)]$.

解 (а) 以 $y = 1$ 为图形的分界线.

如图 1·140 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = f^2(x)$.

(б) 当 $f(x) > 1$ 时, $\sqrt{f(x)} < f(x)$; 而当 $0 \leq f(x) < 1$ 时, $\sqrt{f(x)} \geq f(x)$.

如图 1·141 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = \sqrt{f(x)}$.

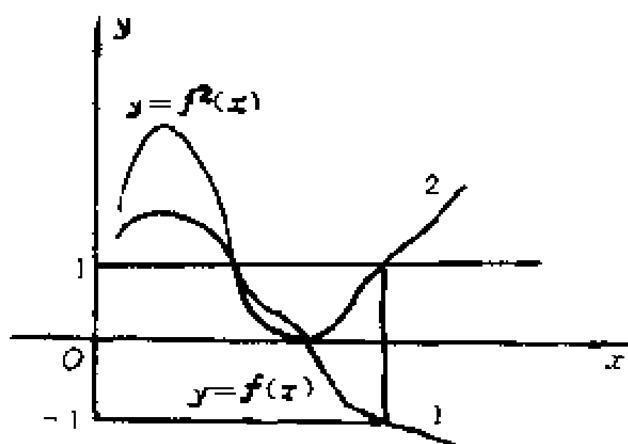


图 1·140

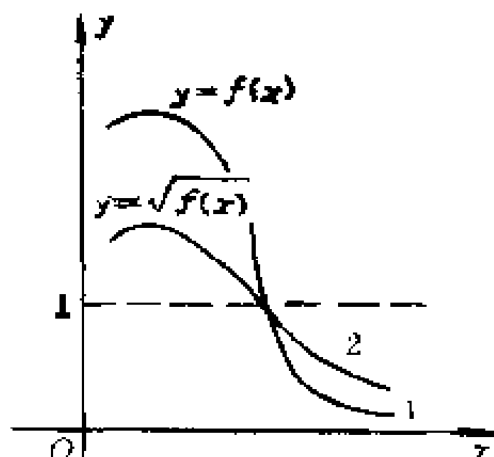


图 1·141

(в) 当 $f(x) \geq 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$; 而当 $0 < f(x) < 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$, 故 $y = \ln f(x)$ 的图形始终在 $y = f(x)$ 之下.

如图 1·142 所示.

(г) 若 $f(x)$ 的存在域为 $[a, b]$, 则仅当 $f(x)$ 之值在 a 与 b 之间, 才能使 $f[f(x)]$ 有意义. 其详细作图法见 330 题(в).

如图 1·143 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = f[f(x)]$.

(д) 当 $f(x) > 0$ 时, $y = 1$; 当 $f(x) = 0$ 时, $y = 0$; 当 $f(x) < 0$ 时, $y = -1$.

如图 1·144 所示.

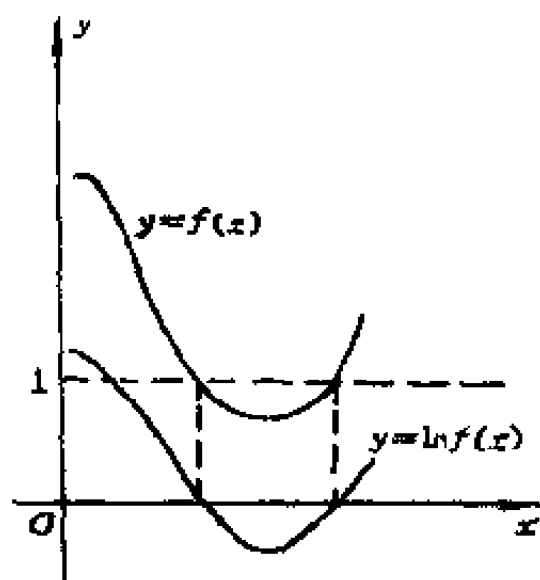


图 1.142

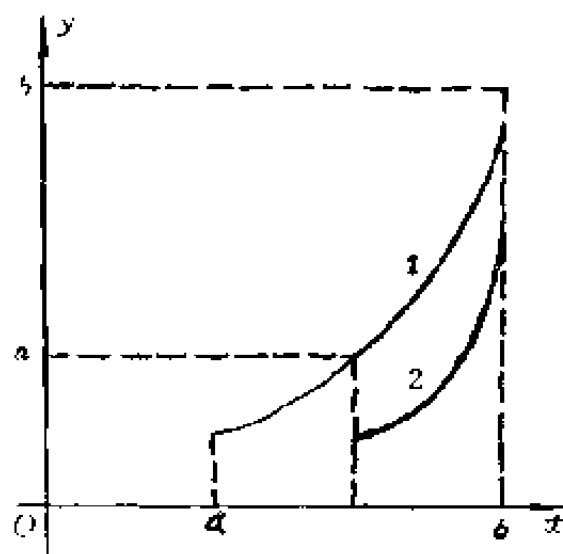


图 1.143

(e) 当 $n \leq f(x) < n+1$ 时, $y = n$ (n 为自然数).

如图 1.145 所示.

其中图 1.144 及 1.145 均为黑粗线所示的图形.

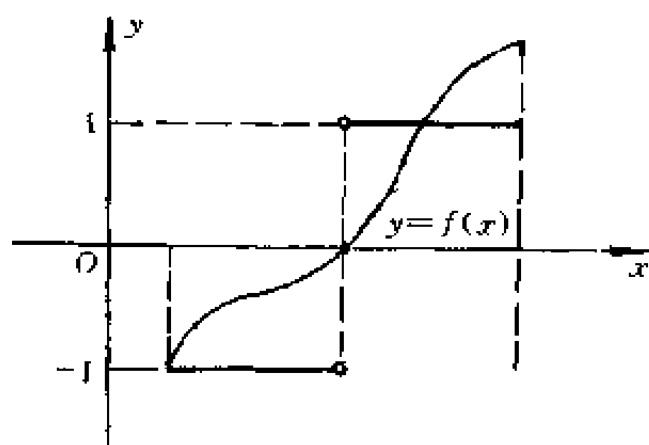


图 1.144

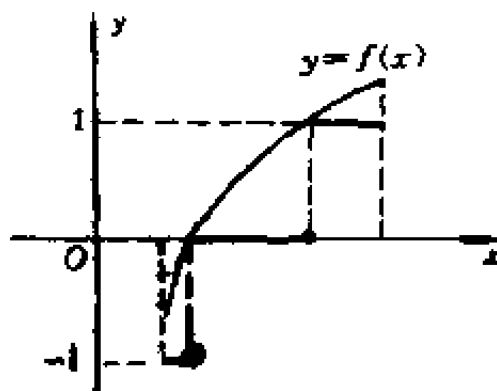


图 1.145

330. 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = f(x) + g(x)$; (b) $y = f(x)g(x)$;

(c) $y = f[g(x)]$.

解 (a)利用图形相加法即得.

如图 1.146 所示.

(b)利用图形相乘法即得.

如图 1.147 所示.

(B)如图 1.148 所示. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引铅直线. 它和 $y=g(x)$ 的图形相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). $PQ=g(x)$. 过 Q 点引水平线, 它与 $y=x$ 交于 R 点, 过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$ 分别交于 T 点及 S 点, 则 $OT=TR=PQ=g(x)$, 因而 $TS=f[g(x)]$. 最后, 把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点, 此即函数 $y=f[g(x)]$ 图形上的一点. 至于该图形上的其它点, 同法求得. 但要注意, 函数 $y=f[g(x)]$ 的存在域是满足不等式

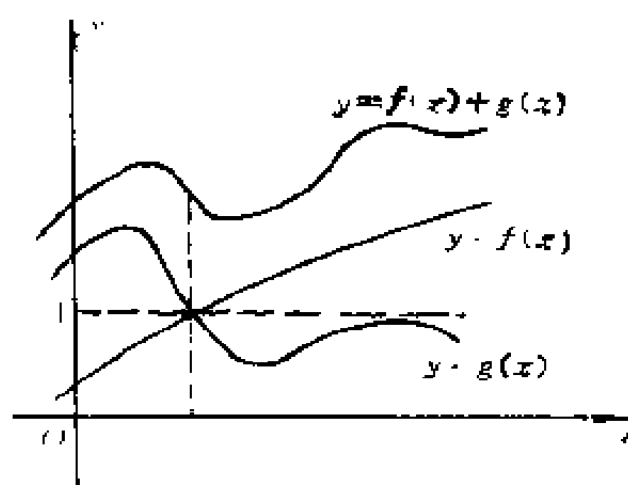


图 1.146

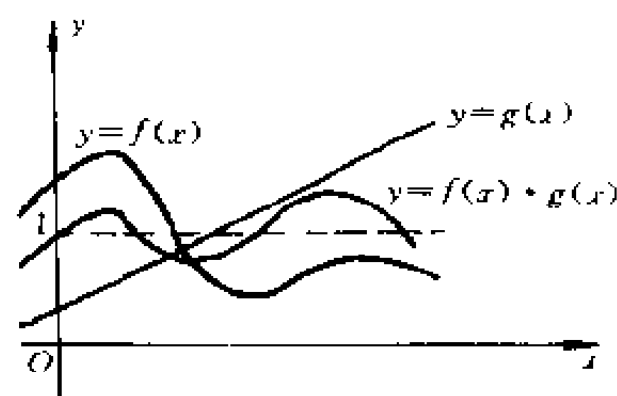


图 1.147

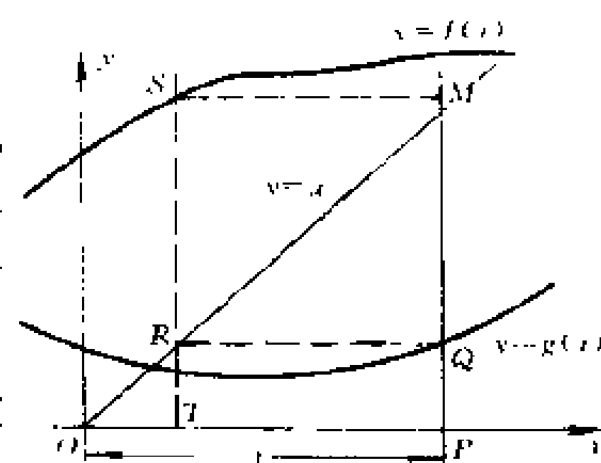


图 1.148

$$a \leq g(x) \leq b$$

的数 x 的集合, 式中 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图形的相加法, 作下列函数的图形:

331. $y = 1 + x + e^x$.

解 如图 1.149 所示.

332. $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$

解 图形关于 Oy 轴对称.

如图 1.150 所示.

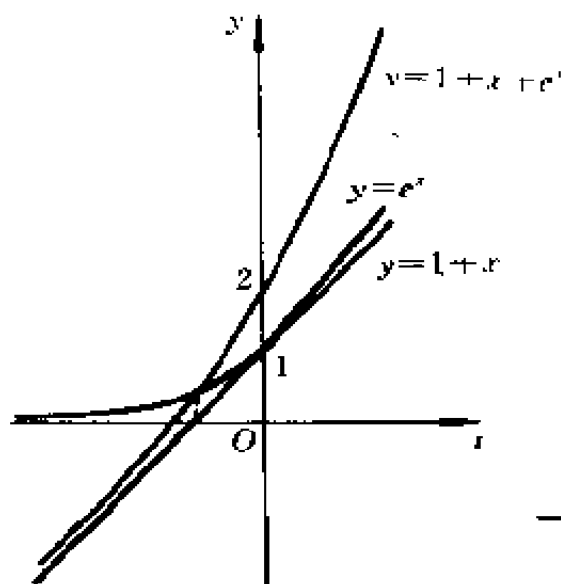


图 1.149

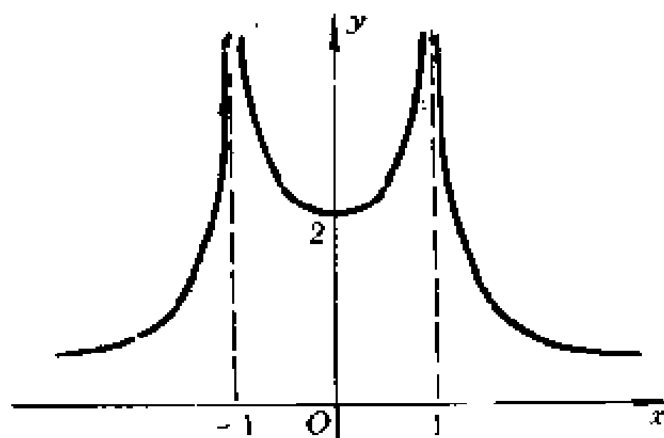


图 1.150

333. $y = x + \sin x$.

解 如图 1.151 所示.

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 = \dots = 1.$$

334. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.152 所示, 图中仅画了主值的一支, 一般地, 在平行线 $y = x + (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $y = x + (2k-1)\frac{\pi}{2}$ 之间 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 有类似的一支.

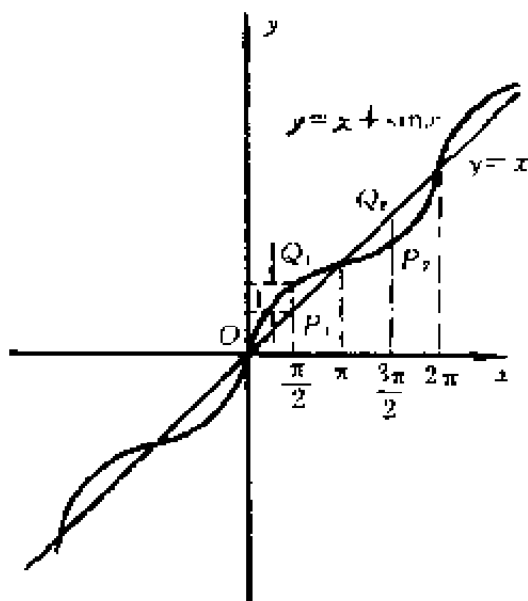


图 1.151

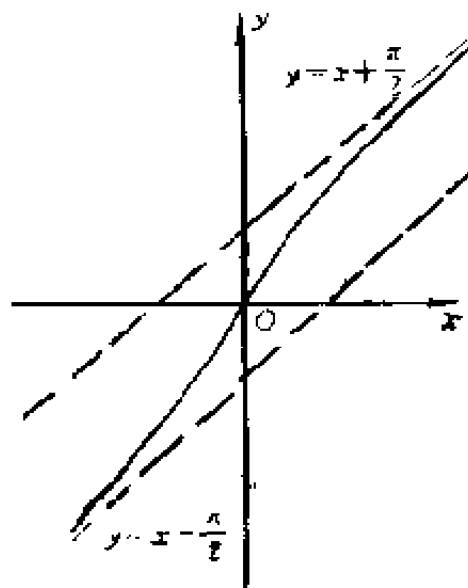


图 1.152

335. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且关于直线 $x = k\pi$ 对称. 周期为 2π . 如图 1.153 所示.

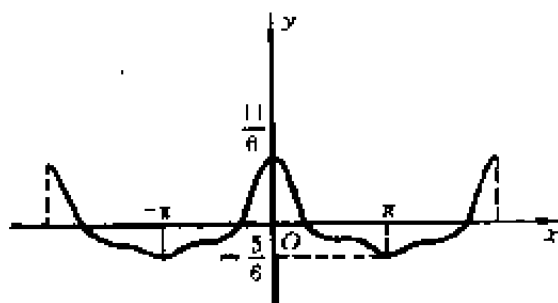


图 1.153

336. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$.

解 图形关于原点对称, 周期为 2π , 且有 $f(x + \pi) = -f(x)$, 故在 $[0, 2\pi]$ 内图形关于直线 $x = \pi$ 反对称. 因此, 我们只需做出 $[0, \pi]$ 内的图形即可.

如图 1.154 所示.

*)即关于点 π 对称,也称之为以 π 为周期的反周期函数.

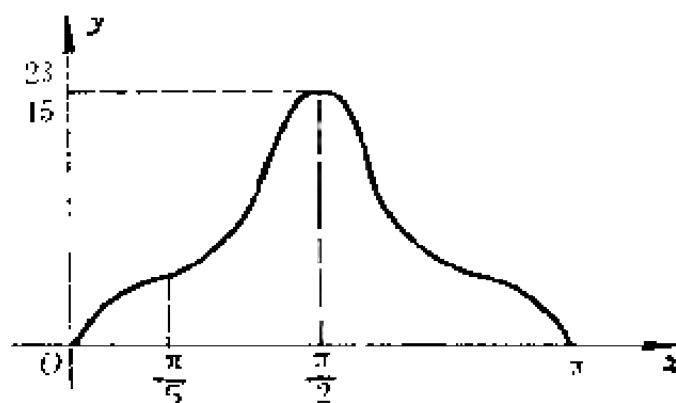


图 1.154

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

如图 1.155 所示.

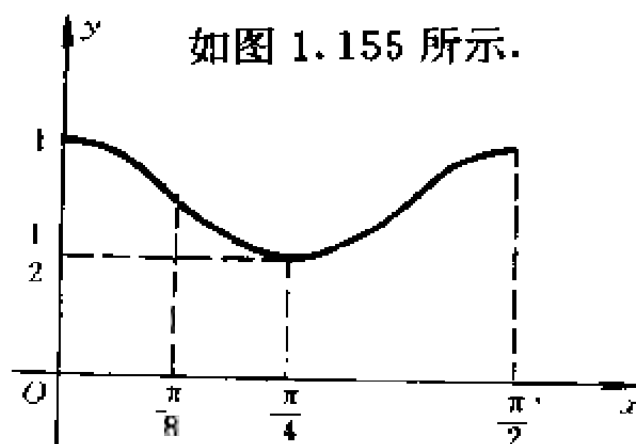


图 1.155

338. $y = |1-x| + |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = 2$;

当 $x < -1$ 时, $y = -2x$;

当 $x > 1$ 时, $y = 2x$.

如图 1.156 所示.

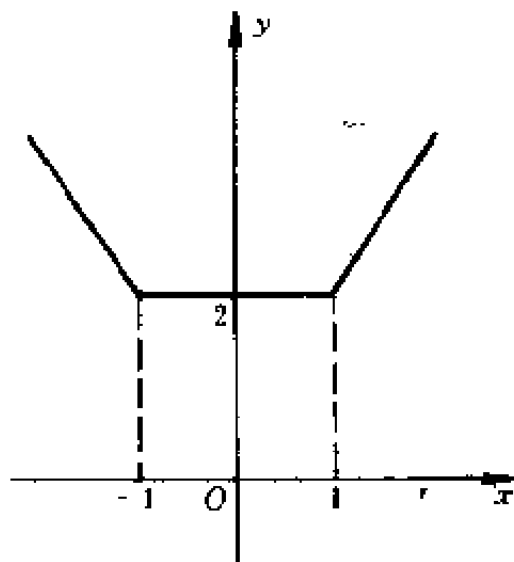


图 1.156

339. $y = |1-x| - |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = -2x$;

当 $x < -1$ 时, $y = 2$;

当 $x > 1$ 时, $y = -2$.

如图 1.157 所示.

340. 作双曲线函数的图形:

(a) $y = \operatorname{ch} x$, 式中 $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

(b) $y = \operatorname{sh} x$; 式中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

(c) $y = \operatorname{th} x$; 式中 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

解 如图 1.158 所示.

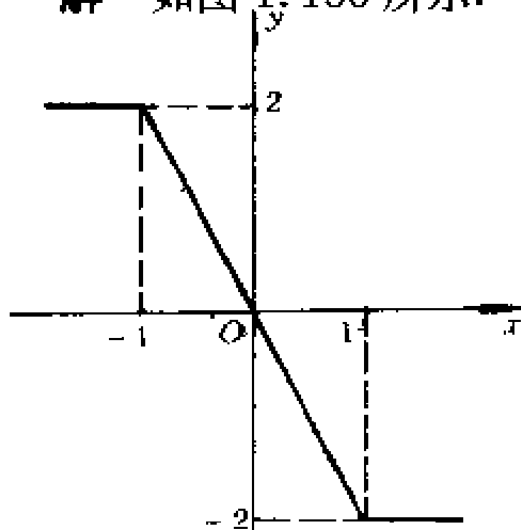


图 1.157

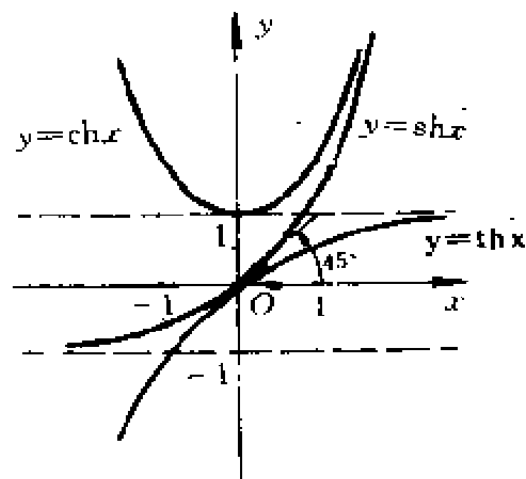


图 1.158

利用图形的相乘法, 作下列函数的图形:

341. $y = x \sin x$.

解 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x$;

又当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = -x$.

如图 1.159 所示.

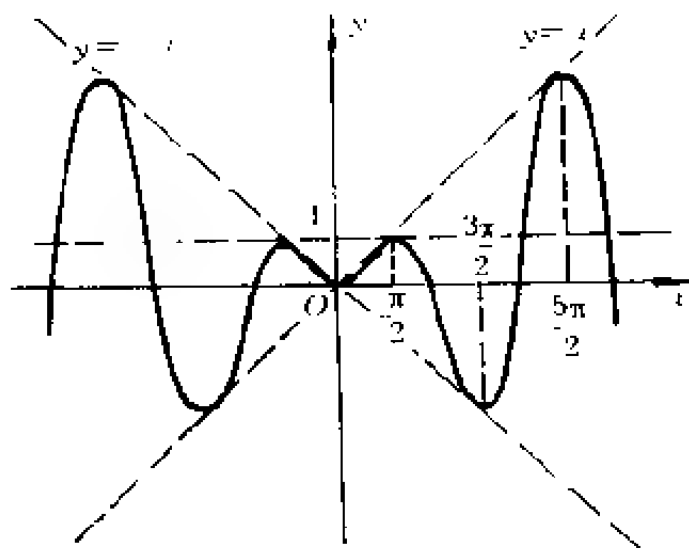


图 1.159

342. $y = x \cos x$.

解 图形关于原点对称.

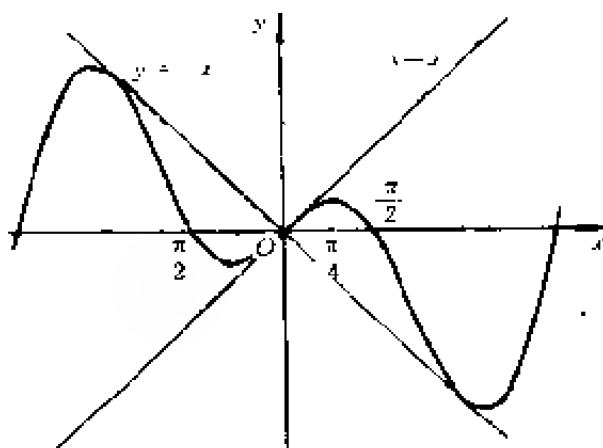


图 1.160

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=0$;

当 $x = 2k\pi$ 时, $y=x$; 当 $x = (2k+1)\pi$ 时, $y=-x$.

如图 1.160 所示.

343. $y = x^2 \sin^2 x$.

解 只要将图形 $y = x \sin x$ 作出后, 再按 329 题(a)的作法画出. 如图 1.161 所示.

其实, 我们也可由下列几点画出该函数的图形:

$$0 \leq y \leq x^2;$$

当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y=0$;

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 时, $y=x^2$.

图形关于 Oy 轴对称.

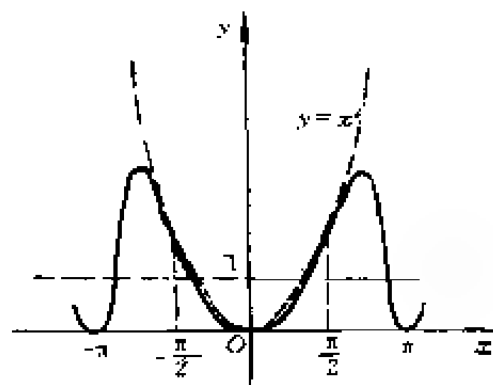


图 1.161

344. $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y=0$;

当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = -\frac{1}{1+x^2}$;

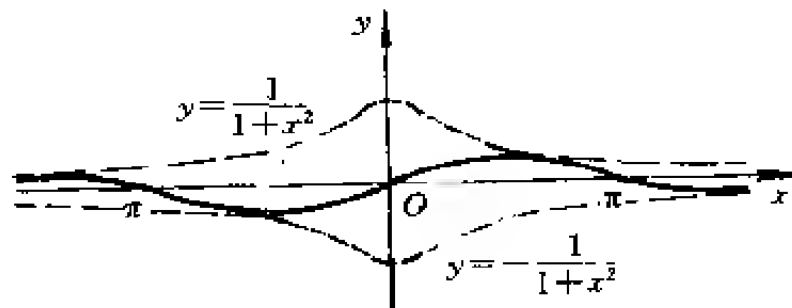


图 1.162

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = \frac{1}{1+x^2}$,

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图 1.162 所示.

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x$.

解 因 $-e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}$, 故图形在图形 $y = e^{-x^2}$ 及 $y = -e^{-x^2}$ 之间.

如图 1.163 所示.

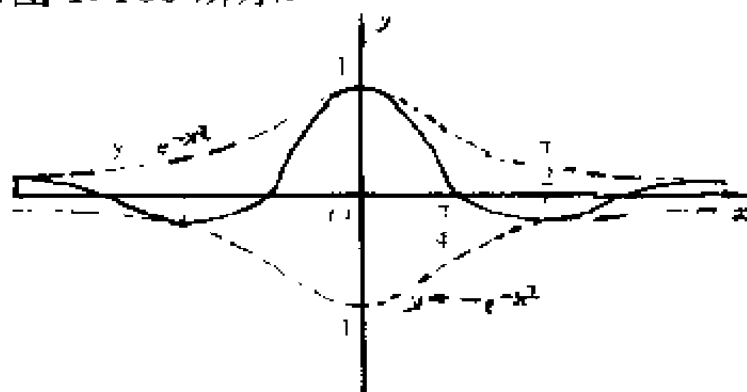


图 1.163

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

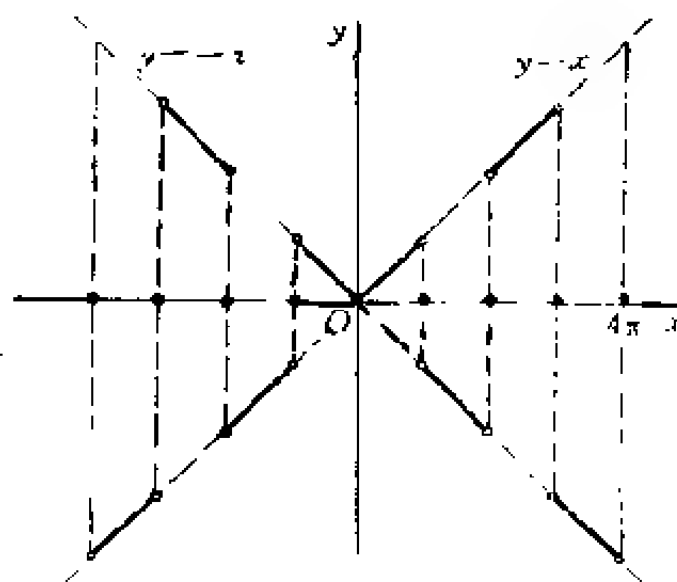


图 1.164

解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -x$.

如图 1.164 所示.

347. $y = [x] \cdot |\sin \pi x|$.

解 当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $n < x < n+1 (n \text{ 为自然数})$ 时, $y = n |\sin \pi x|$.

如图 1.165 所示.

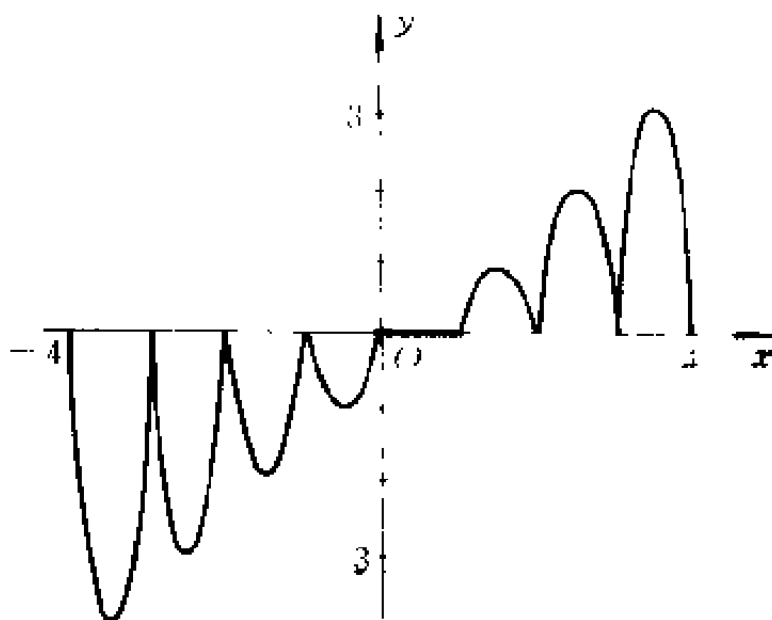


图 1.165

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于原点对称. 周期为 π .

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = \cos x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -\cos x$.

如图 1.166 所示.

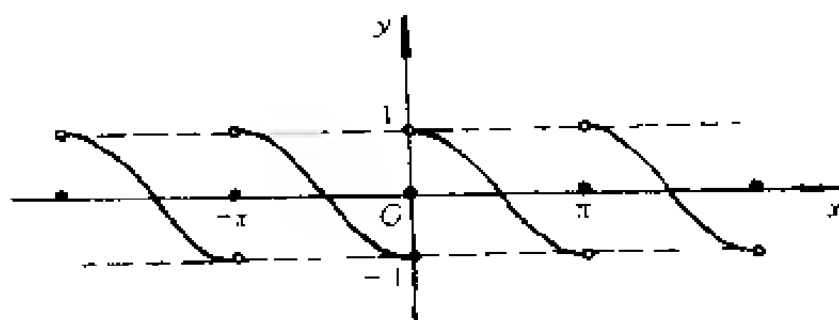


图 1.166

349. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

作函数

$$y = f(x)f(a-x)$$

当 (a) $a = 0$, (b) $a = 1$,

(c) $a = 2$ 时的图形.

解 (a) $y = f(x)f(-x)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以, $y = f^2(x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = \begin{cases} (1+x)^2, & \text{若 } -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.167 所示.

(b) $y = f(x) \cdot f(1-x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

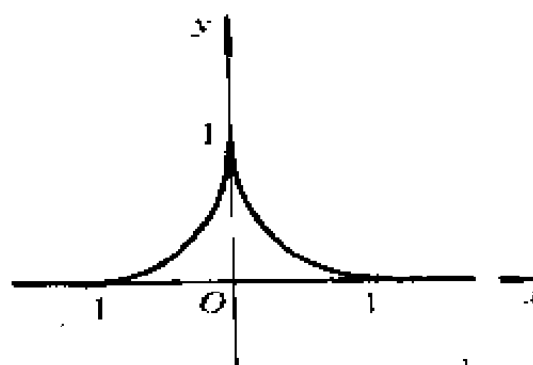


图 1.167

$$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leq 0, \\ x - x^2, & \text{若 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$$

如图 1.168 所示.

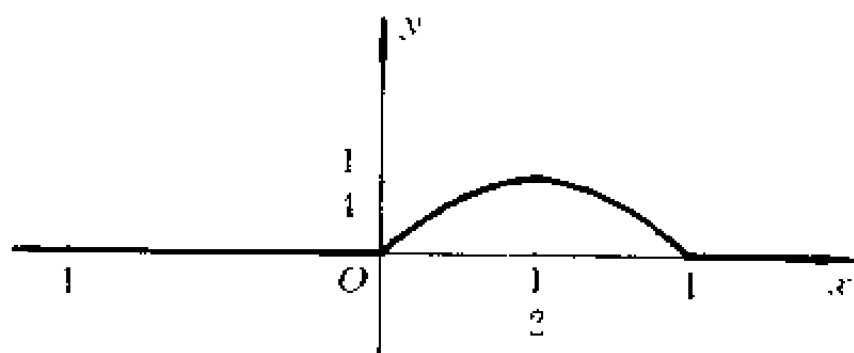


图 1.168

$$(B) y = f(x)f(2-x).$$

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = 0.$$

如图 1.169 所示.

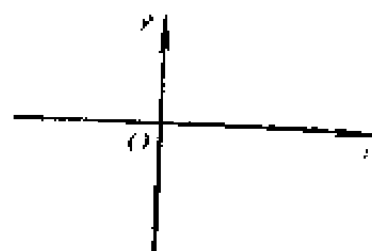


图 1.169

350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图形.

解 当 $2k < x < 2k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\sin \pi x > 0,$$

$$\operatorname{sgn}(\sin \pi x) = 1,$$

$$\text{因而, } y = x + \sqrt{x}.$$

而当 $2k+1 < x < 2k+2$ 时,

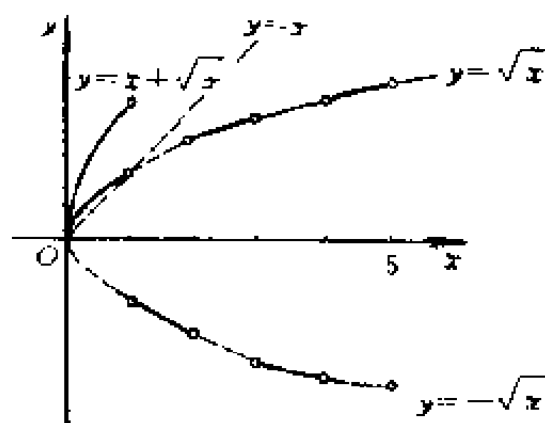


图 1.170

$$y = x - \sqrt{x}.$$

图 1.170 中系函数

$$y = \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

的图形(黑粗线所示).

其中在 $y=x$ 上的一支系 $y = \sqrt{x} + x$ 的一段.

至于函数

$$y = x + \sqrt{x} \cdot \operatorname{sgn}(\sin \pi x) \text{ 的图形如图 1.171 所示.}$$

作函数

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

的图形, 设:

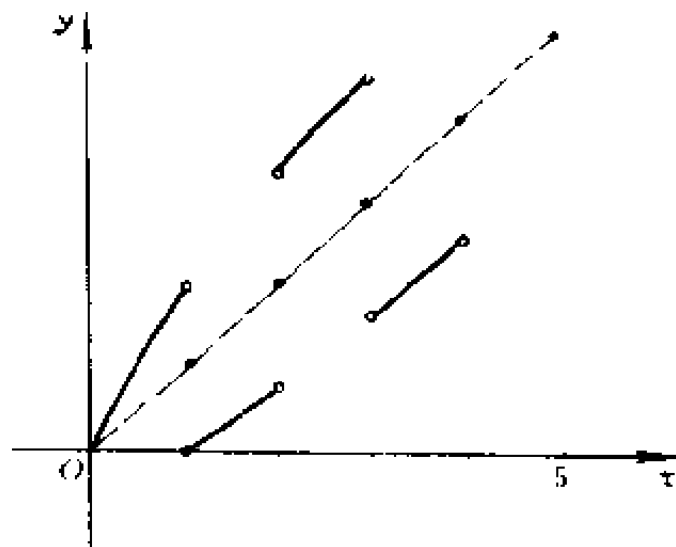


图 1.171

351. $f(x) = x^2(1-x^2).$

解 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}.$

利用图形的相加法, 将函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的图

形相加即得. 如图 1.172 所示.

352. $f(x) = x(1-x)^2.$

解 $y = \frac{1}{x(1-x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}.$

当 $x > 0$ 时, $y > 0$;

当 $x < 0$ 时, $y < 0$.

利用图形的相加法即得, 如图 1.173 所示.

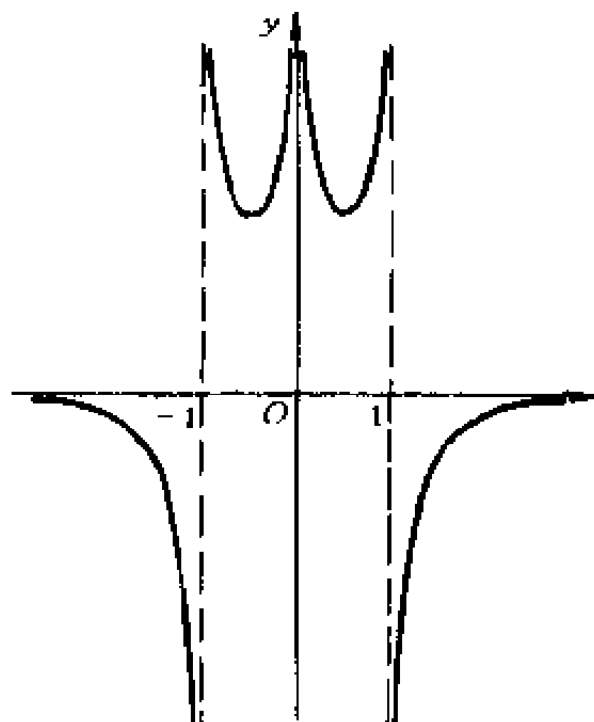


图 1.172

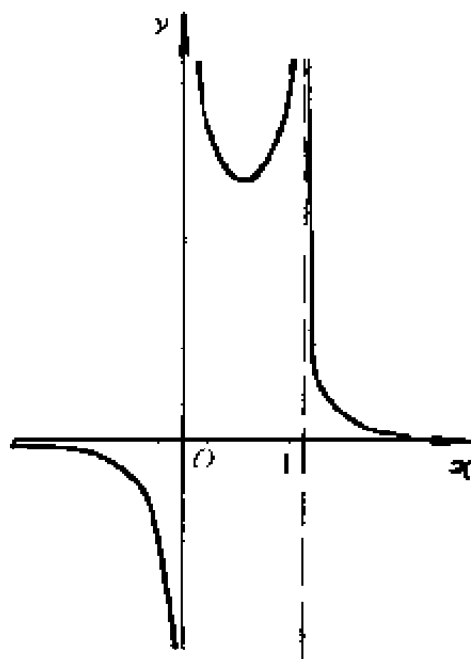


图 1.173

353. $f(x) = \sin^2 x.$

解 $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ 是一
周期为 π 的周期函
数.

图形关于 Oy 轴
对称. 如图 1.174 所
示.

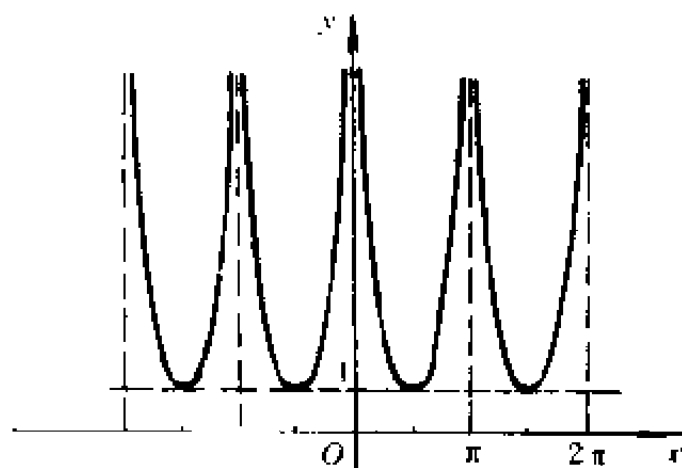


图 1.174

354. $f(x) = \ln x.$

解 $y = \frac{1}{\ln x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, y 由 0 下降到 $-\infty$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, y 由 $+\infty$ 下降到 0. 如图 1.175 所示.

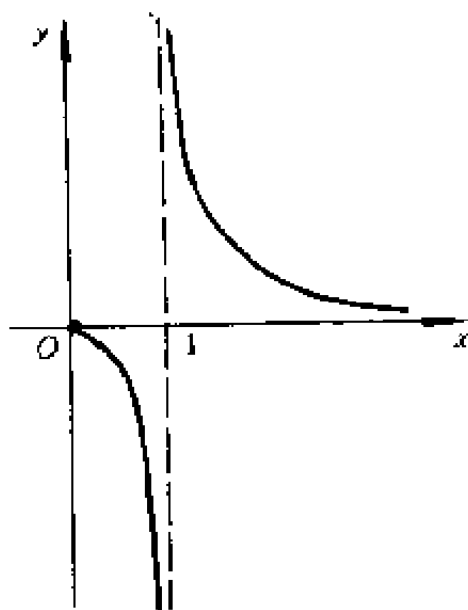


图 1.175

355. $f(x) = e^x \sin x$.

解 $y = e^{-x} \csc x$.

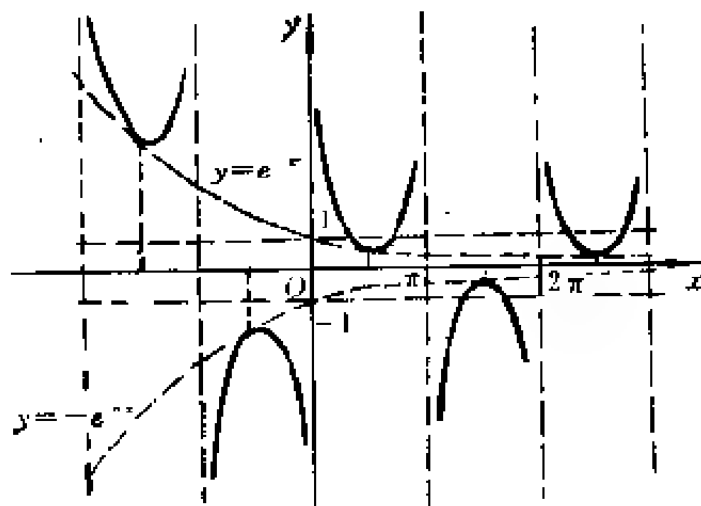


图 1.176

因为 $|\csc x| \geq 1$, 所以

$$|y| \geq e^{-x}.$$

利用图形的相乘法即得. 如图 1.176 所示.

356. 设:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{若 } -\infty < u < -1; \\ u, & \text{若 } -1 \leq u \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数

$$y = f(u)$$

的图形, 其中 $u = 2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ 时,

$y = 2\sin x$; 当 $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi|$

$< \frac{5\pi}{6}$, $y = (-1)^k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

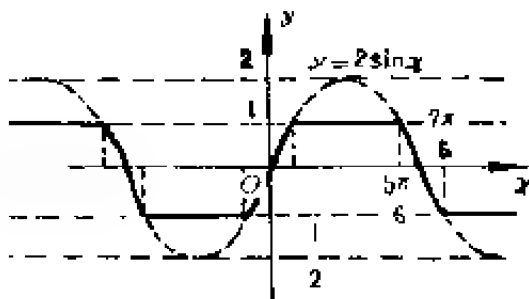


图 1.177

357. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ 和}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

作下列函数的图形:

$$(a) y = \varphi[\varphi(x)]; \quad (b) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(c) y = \psi[\varphi(x)]; \quad (d) y = \psi[\psi(x)].$$

$$\text{解 } (a) \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

$\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

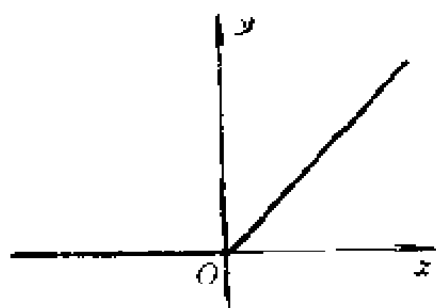


图 1.178

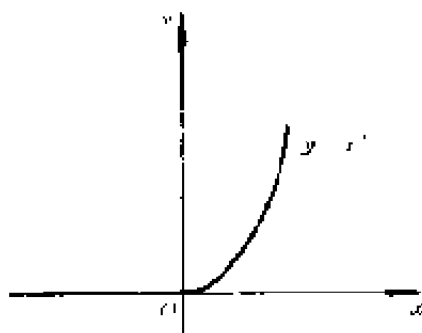


图 1.179

$$(6) \varphi[\psi(x)] = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.179 所示.

$$(B) \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.179 所示.

$$(r) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} x^4, & \text{若 } x \geq 0; \\ x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.180 所示.

358. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

作函数:

$$(a) y = \varphi[\varphi(x)];$$

$$(6) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(B) y = \psi[\varphi(x)];$$

$$(r) y = \psi[\psi(x)] \text{ 的图形.}$$

解 (a) $\varphi[\varphi(x)] = 1$.

如图 1.181 所示.

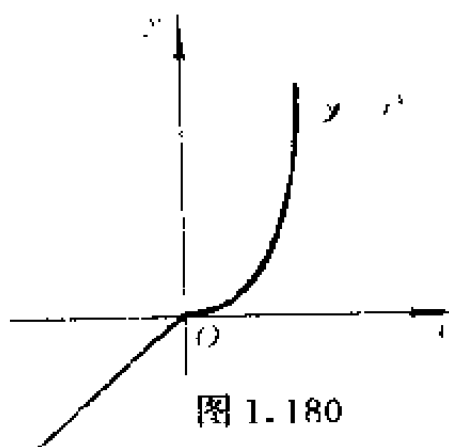


图 1.180

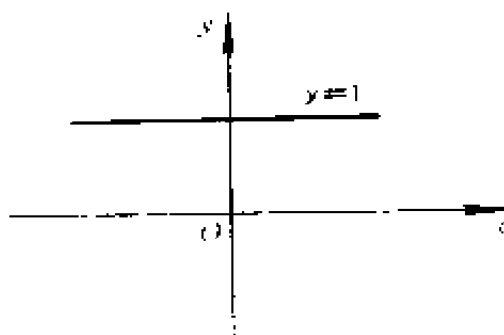


图 1.181

(6) $\varphi[\psi(x)] = \varphi[\psi(-x)]$, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $0 \leq x < 1$ 时,
 $\psi(x) = 2 - x^2$,

由于

$$1 < 2 - x^2 \leq 2,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$.

当 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-1 \leq 2 - x^2 \leq 1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 1$.

当 $\sqrt{3} < x \leq 2$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-2 \leq 2 - x^2 < -1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$.

当 $x > 2$ 时, $\psi(x) = 2$, 所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$. 如图 1.182 所示.

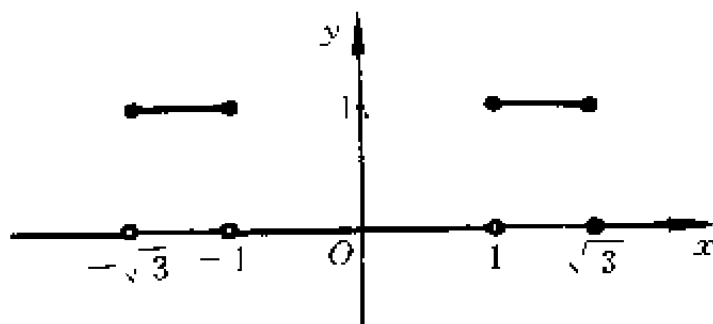


图 1.182

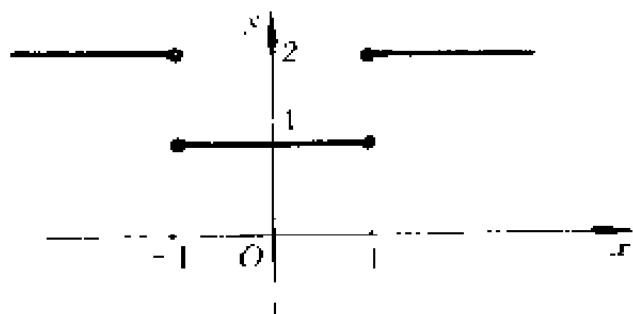


图 1.183

$$(B) \varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 2, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1. 183 所示.

$$(r) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ -2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

如图 1. 184 所示.

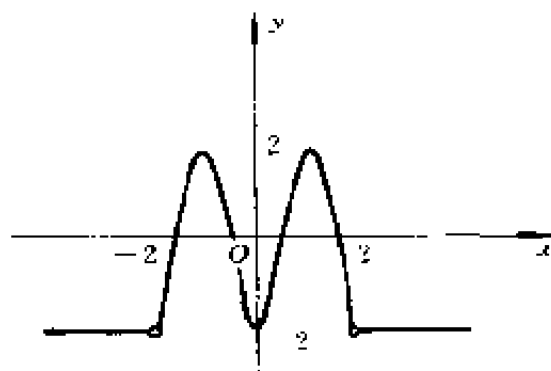


图 1. 184

359. 由函数 $f(x)$ 定义于正数域 $x > 0$ 内, 把 $f(x)$ 延拓到负数域 $x < 0$ 内, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数. 设

$$(a) f(x) = 1 - x; \quad (b) f(x) = 2x - x^2;$$

$$(B) f(x) = \sqrt{x}; \quad (r) f(x) = \sin x;$$

$$(d) f(x) = e^x; \quad (e) f(x) = \ln x.$$

作出对应的函数的图形.

解 (a) (1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = 1 + x$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为偶函数.

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -(1 + x)$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为奇函数.

如图 1. 185 所示.

(b) (1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -2x - x^2$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = 2x + x^2$ 即行.

如图 1. 186 所示.

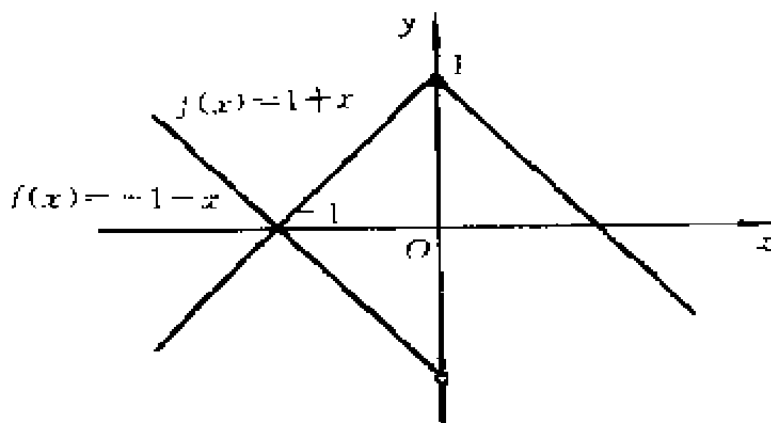


图 1.185

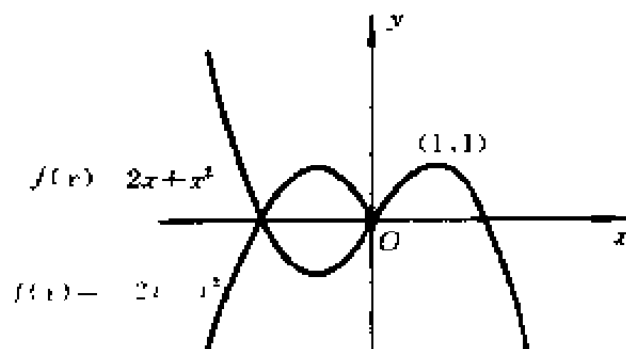


图 1.186

(B)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \sqrt{-x}$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sqrt{-x}$ 即行.

如图 1.187 所示.

(Γ)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sin x = |\sin x|$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

(Д)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = e^{-x}$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -e^{-x}$ 即行.

(e)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \ln(-x)$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\ln(-x)$ 即行.

如图 1.190 所示.

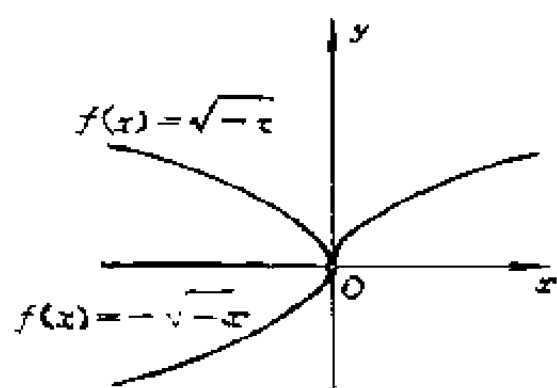


图 1.187

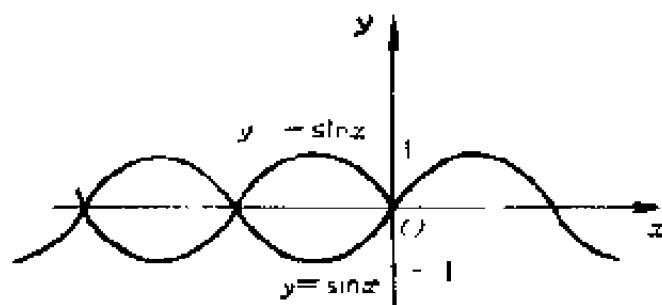


图 1.188

如图 1.189 所示.

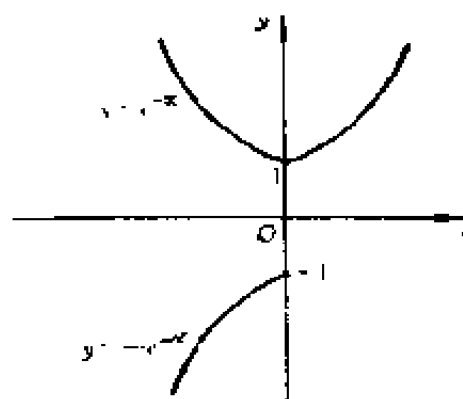


图 1.189

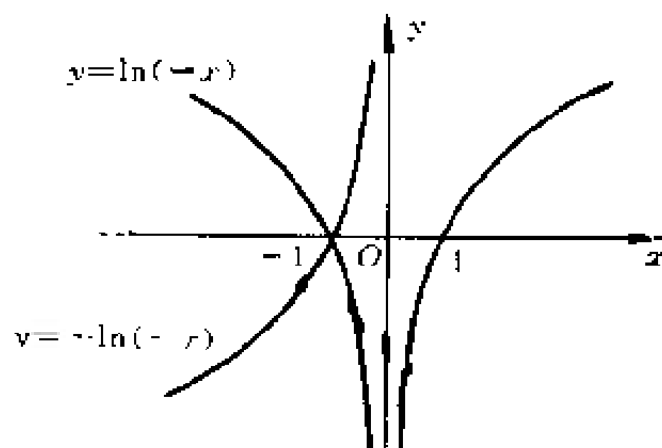


图 1.190

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称:

(a) $y = ax^2 + bx + c$; (6) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$;

(B) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 < a < b$);

(r) $y = a + b \cos x$.

解 (a) $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 它关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$

对称. (6) 显然图形对于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

(B) 显然图形对于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称.

(Г) 对于直线 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 对称.

361. 确定下列函数的图形的对称中心:

(a) $y = ax + b$; (б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

(B) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

(Г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;

(Д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

解 (a) 显然对称中心为 $(x_0, ax_0 + b)$, x_0 任意.

(б) 设对称中心为 (x_0, y_0) , 则对充分大的 x , 有 y 使 $y + y_0 = \frac{c(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d}$, $-y + y_0 = \frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d}$, 由此易得 $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$.

(B) 用类似于(б)的方法, 可得对称中心为 (x_0, y) , 其中 $x_0 = -\frac{b}{3a}$, $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$.

(Г) 类似于(б), 可得对称中心为 $(2, 0)$.

(Д) 类似于(б), 可得对称中心为 $(2, 1)$.

362. 作周期函数的图形:

(a) $y = |\sin x|$; (б) $y = \operatorname{sgn} \cos x$;

(B) $y = f(x)$, 其中 $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$, 假设 $0 \leq x \leq 2l$ 和 $f(x+2l) \equiv f(x)$;

(Г) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$;

(Д) $y = (x)$, 此处 (x) 为从数 x 至与它最近的整数间的距离.

解 (a) 如图 1.191 所示, 周期 π .

(6) 如图 1.192 所示, 周期 2π .

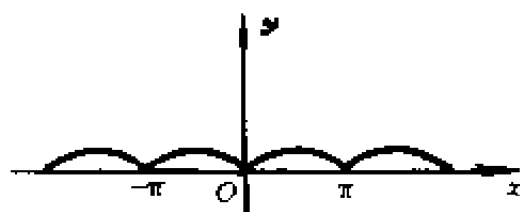


图 1.191

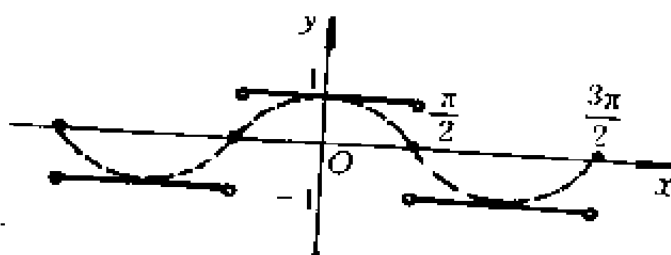


图 1.192

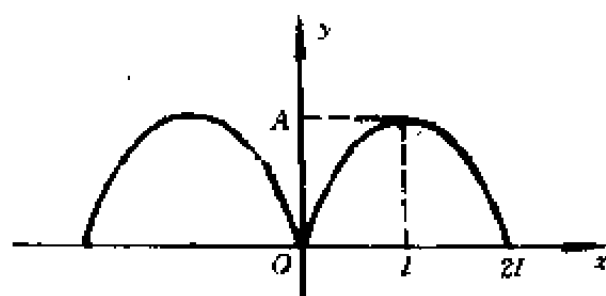


图 1.193

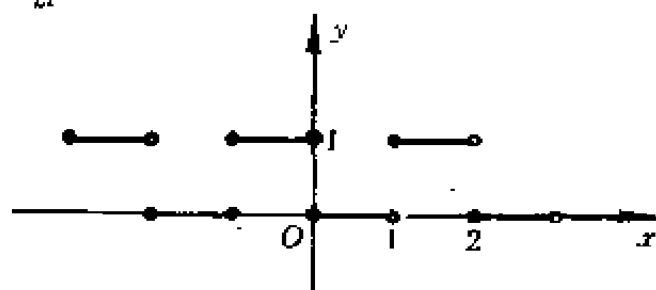


图 1.194

(b) 当 $0 \leq x \leq 2l$ 时,

由 $f(x)$ 的定义易得

$$f(x+2kl) = f(x) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数, 它在 $[0, 2l]$ 内的图形为一抛物线, 顶点为 (l, A) . 如图 1.193 所示.

(c) 周期为 2 , 如图 1.194 所示.

*) 原本该题为 $y = |x| - 2\left[\frac{x}{2}\right]$, 当 $x \geq 0$ 时, 它是以 2 为周期函数.

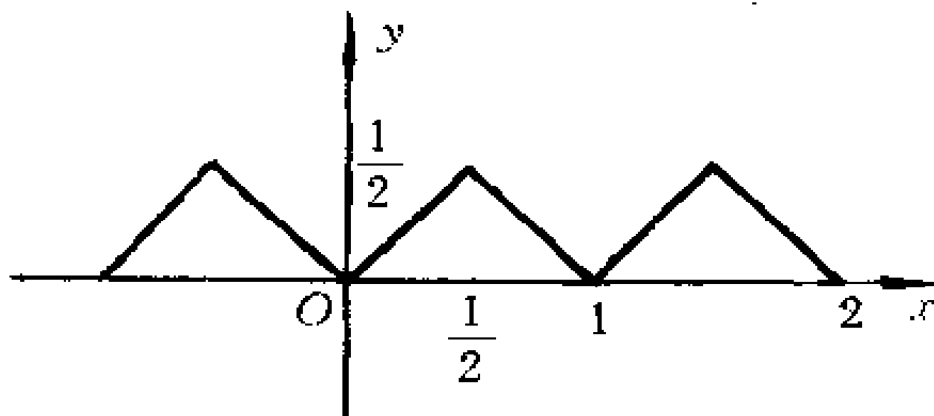


图 1.195

(д) 周期为 1, 如图 1.195 所示.

363. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于二垂直轴 $x = a$ 和 $x = b$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 设 x 为任一实数, 则按假设有

$$f(a+x) = f(a-x) \text{ 及 } f(b+x) = f(b-x).$$

在 $f(a+x) = f(a-x)$ 中将 x 换成 $x + (b-a)$, 则得

$$f(x+b) = f(a-x-b+a) = f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b) = f(b-x)$, 所以

$$f(b-x) = f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x , 则得 $f(x) = f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$, 即得

$$f(x+2(b-a)) = f(x),$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

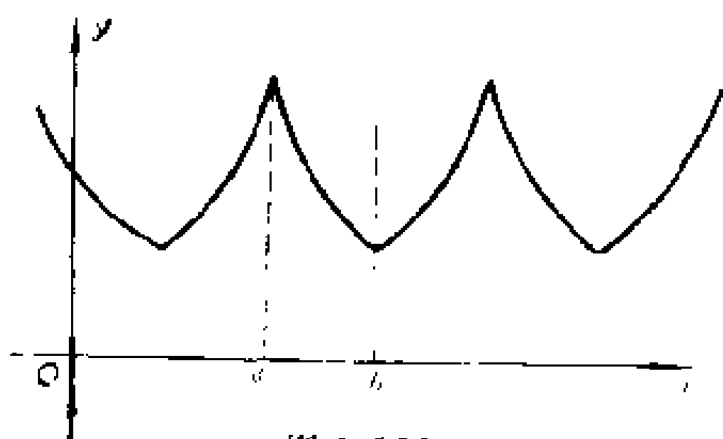


图 1.196

364. 证明: 若函数 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 是任一实数, 按假设有:

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad (1)$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x). \quad (2)$$

在(1)中, 将 x 换成 $x + (b-a)$ 则得

$$f(b+x) - y_0 = y_0 - f(2a-b-x) \quad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1 - f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-b-x) \quad (4)$$

在(4)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-2b+x) \quad (5)$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$, 则得

$$f(x) = 2(y_0 - y_1) + f[2(b-a)+x].$$

令

$$f(x) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}x + \varphi(x) \quad (6)$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} f[x+2(b-a)] &= -\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)] \\ &\quad +\varphi(x+2(b-a)), \\ f(x)-f[x+2(b-a)] &= 2(y_0-y_1)+\varphi(x) \\ &\quad -\varphi[x+2(b-a)]. \end{aligned}$$

因此由(5)式可得

$$\varphi(x) = \varphi[x+2(b-a)]. \quad (7)$$

由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0 = y_1$, 则由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个周期函数.

365. 证明: 若函数 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形关于点 $A(a, y_0)$ 及直线 $x=b$ ($b \neq a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 为任一实数, 按假设则有

$$\begin{aligned} f(a+x)-y_0 &= y_0-f(a-x), \\ f(b+x) &= f(b-x). \end{aligned} \quad (1)$$

在(1)中, 将 x 换成 $x+(b-a)$, 则得

$$f(b+x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x). \quad (2)$$

在(2)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x) = 2y_0 - f(2a-2b+x). \quad (3)$$

在(3)中, 将 x 换成 $2b-2a+x$, 则得

$$f(2b-2a+x) = 2y_0 - f(x). \quad (4)$$

由(3)(4)得 $f(2a-2b+x)=f(2b-2a+x)$, 再将 x 换成 $2b-2a+x$, 即得

$$f(x)=f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

366. 设 $f(x+1)=2f(x)$ 及当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 作函数

$$y=f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 图形为一抛物线, 顶点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 只要将纵标放大 2 倍, 余类推.

如图 1.197 所示.

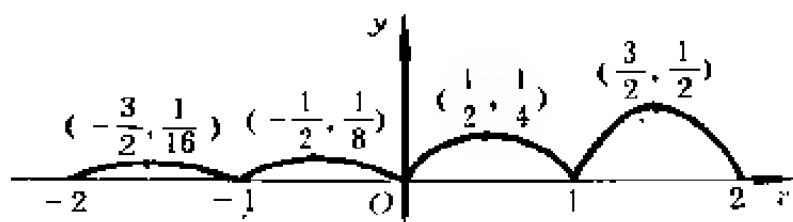


图 1.197

当 $x = \frac{2n+1}{2}$ 时, $y = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$, 因而当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$; 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

367. 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$; 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x)=0$, 作函数

$$y=f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 由题设知

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x)=0$;

当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时, 设 $0 < x_1 \leq \pi$, 则有

$$f(x) = f(x_1 + \pi) - f(x_1) + \sin x_1 = \sin x_1;$$

当 $2\pi < x \leq 3\pi$ 时, 设 $\pi < x_2 \leq 2\pi$, 则有

$$f(x) = f(x_2 + \pi) = f(x_2) + \sin x_2 = 0;$$

余类推. 周期为 2π . 如图 1.198 所示.

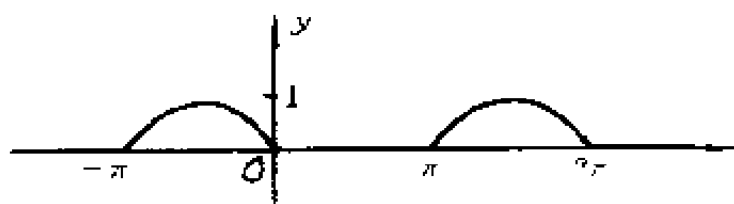


图 1.198

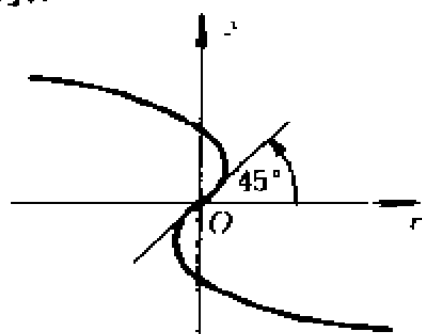


图 1.199

368. 作函数 $y=y(x)$ 的图形, 设:

$$(a) x = y - y^3; \quad (b) x = \frac{1-y}{1+y^2};$$

$$(c) x = y - \ln y; \quad (r) x^2 = \sin y.$$

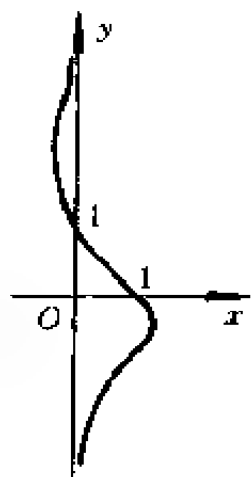


图 1.200

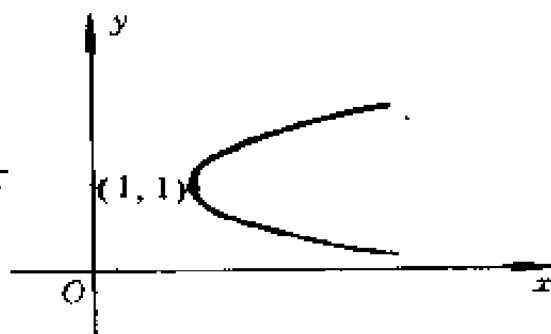


图 1.201

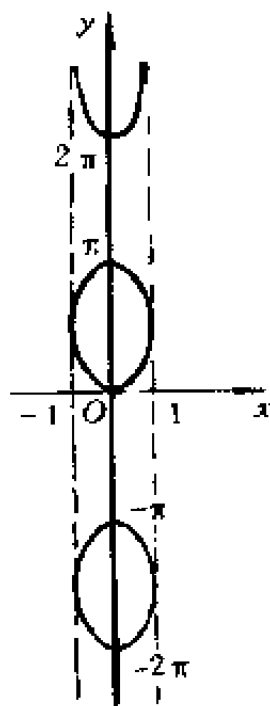


图 1.202

解 (a) 如图 1.199 所示.

(b) 如图 1.200 所示.

(B)如图 1.201 所示.

(r)如图 1.202 所示.

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形, 设:

(a) $x=1-t, y=1-t^2$;

(б) $x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$;

(B) $x=10\cos t, y=\sin t$

(椭圆);

(r) $x=\operatorname{ch} t, y=\operatorname{sh} t$

(双曲线);

(д) $x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$;

(e) $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$ (摆线);

(ж) $x=t+\sqrt{t}, y=\sqrt{t+1} (t>0)$.

解 (a) $y-1=-(x-1)^2$. 如图 1.203 所示.

(б)如图 1.204 所示.

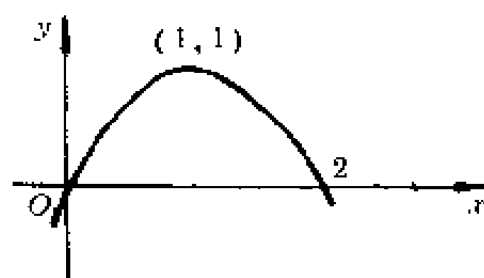


图 1.203

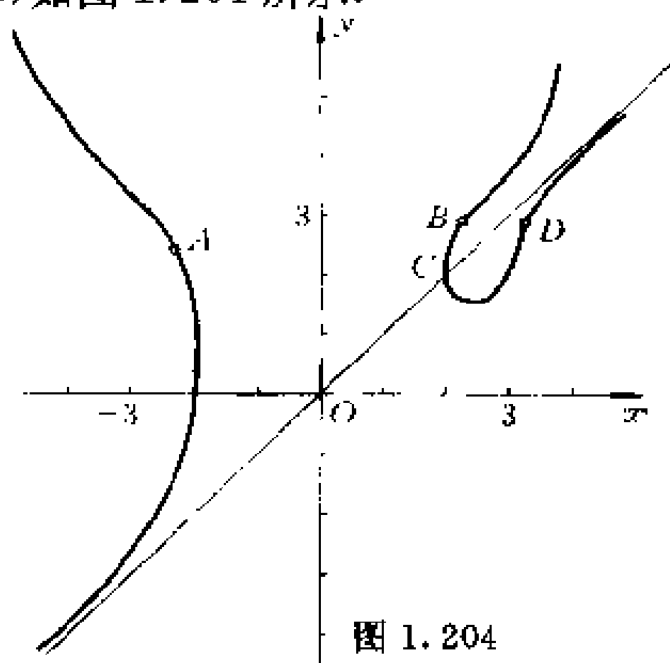


图 1.204

(B) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$. 如图 1.205 所示.

(г) $x^2 - y^2 = 1$. 如图 1.206 所示.

(д) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 如图 1.207 所示.

(е) 如图 1.208 所示.

(ж) 如图 1.209 所示.



图 1.205

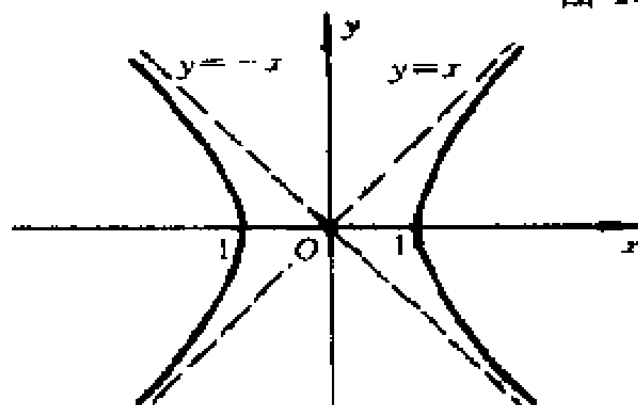


图 1.206

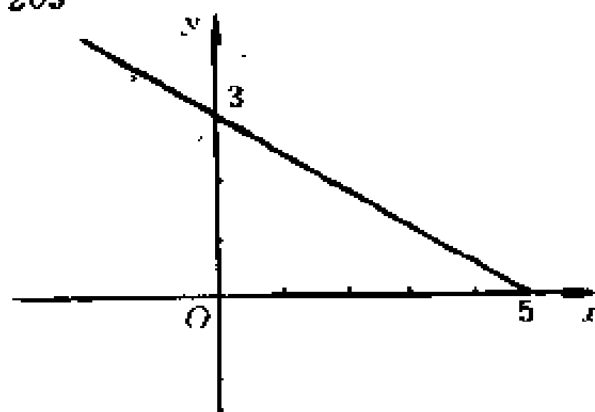


图 1.207

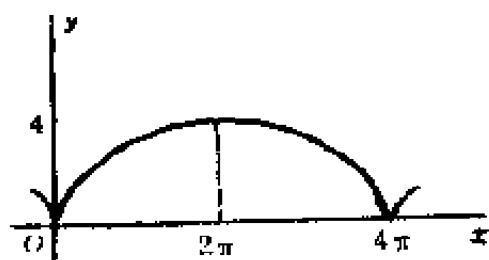


图 1.208

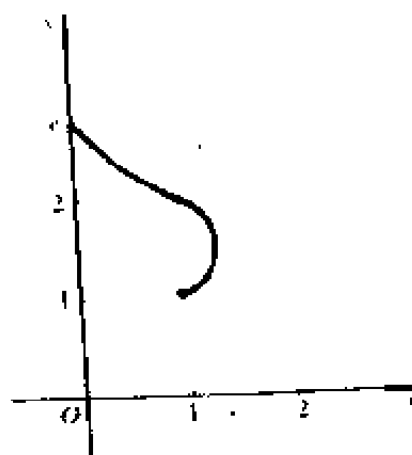


图 1.209

370. 作下列隐函数的图形:

(a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);

(б) $x^3 + y^3 - xy = 0$ (笛卡尔叶形线);

(в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);

(г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (内摆线);

(д) $\sin x = \sin y$;

(е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

(ж) $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$;

(з) $x - |x| = y - |y|$.

解 (a) 将坐标轴按正向绕原点旋转 45° , 得新坐标系 $Ox'y'$, 则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{2}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{3} = 1.$$

如图 1.210 所示.

(б) 渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如图 1.211 所示.

(в) 如图 1.212 所示.

(г) 如图 1.213 所示.

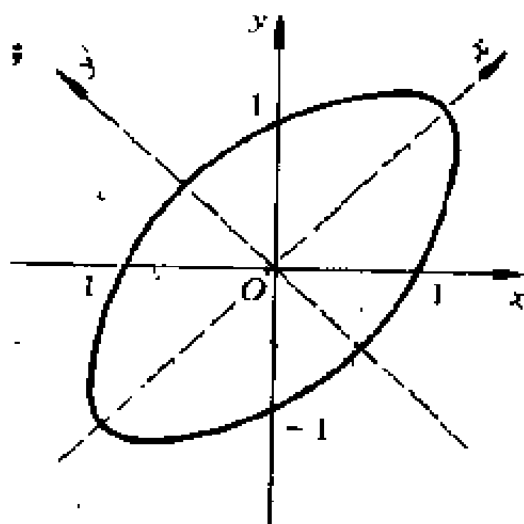


图 1.210

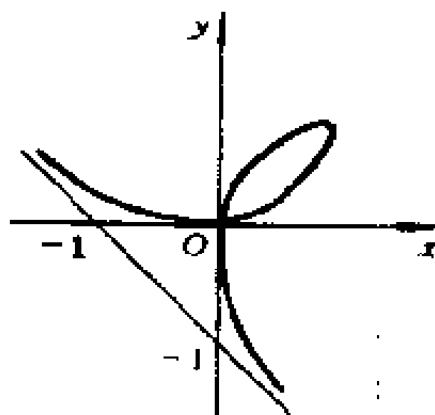


图 1.211

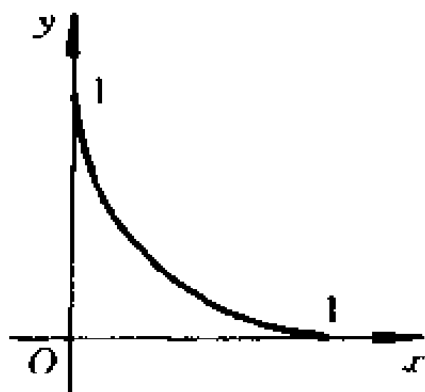


图 1.212

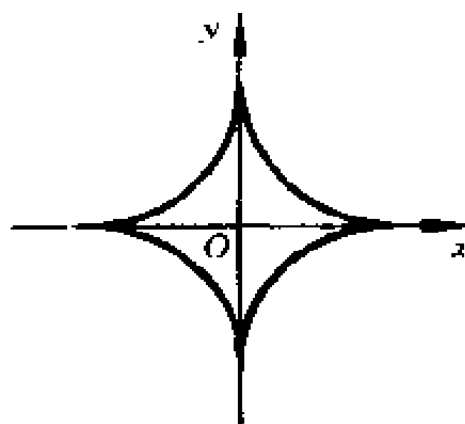


图 1.213

(д) $y = x + 2k\pi$ 或 $y = (2k + 1)\pi - x$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 如图 1.214 所示.

(е) $y = x^2 + 2k$ 或 $y = 2k - x^2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

如图 1.215 所示.

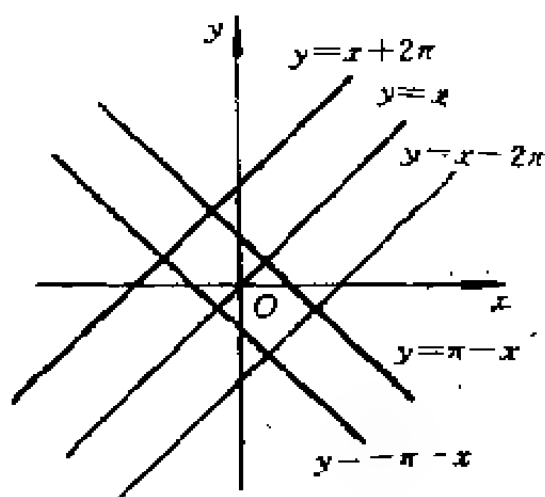


图 1.214

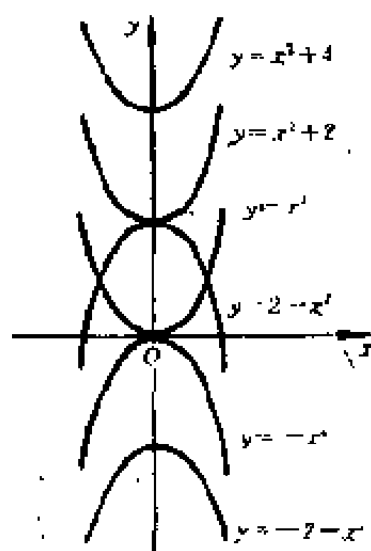


图 1.215

(ж) 如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(е) 如图 1.217 所示. 图形包括第一象限阴影部分 (连同边界): $x \geq 0, y \geq 0$ 以及第三象限的黑粗线部分: y

$$= x, x < 0, y < 0.$$

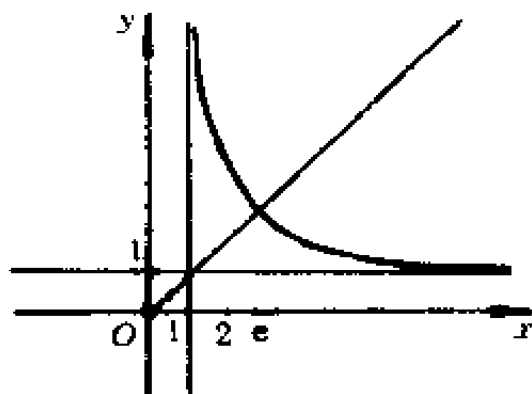


图 1.216

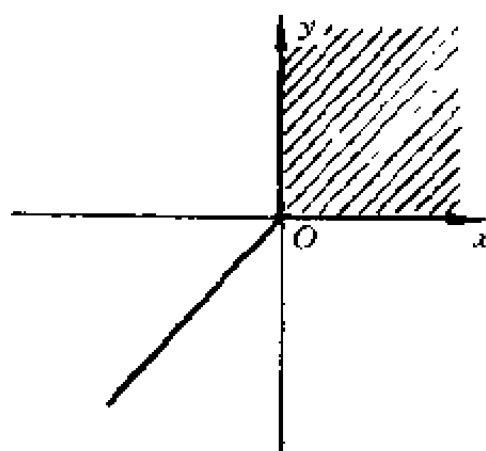


图 1.217

371. 在极坐标 $(r), \varphi$ 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形.

设:

(a) $r = \varphi$ (阿基米得螺旋线); (б) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺旋线);

(в) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$);

(г) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (对数螺旋线);

(д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线);

(е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);

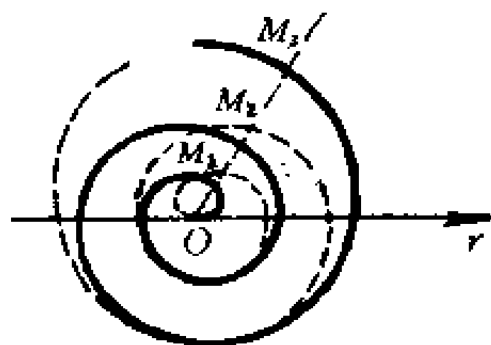


图 1.218

(ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (贝努里双纽线);

(з) $\varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1)$; (и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

解 (в) 如图 1.218 所示. $M_1M_2 = M_2M_3 = \dots = 2\pi$.

(б) 如图 1.219 所示.

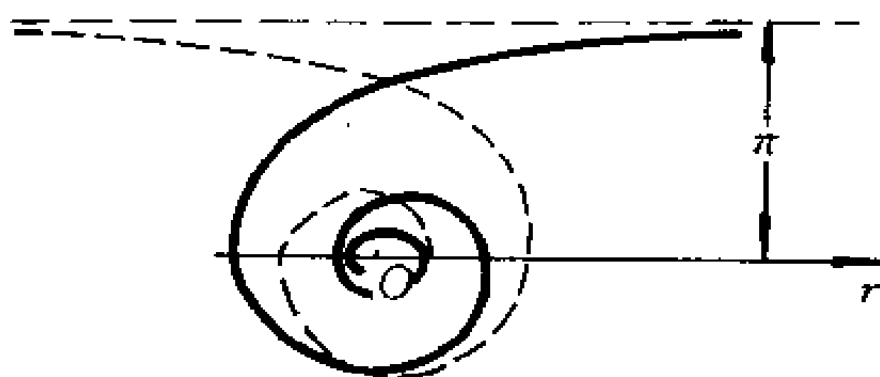


图 1.219

(в) 如图 1.220 所示.

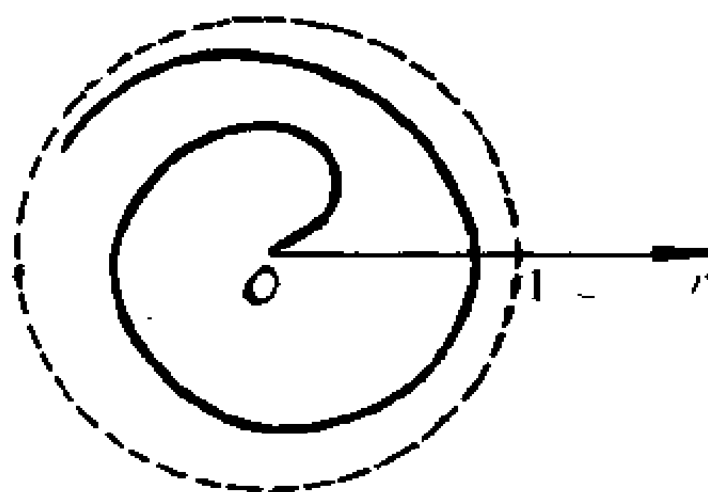


图 1.220

(г) 如图 1.221 所示.

(д) 如图 1.222 所示.

(е) 如图 1.223 所示.

(ж) 如图 1.224 所示.

(з) 如图 1.225 所示.

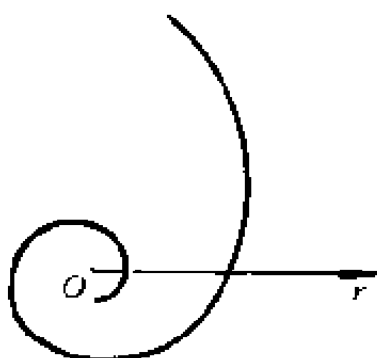


图 1.221

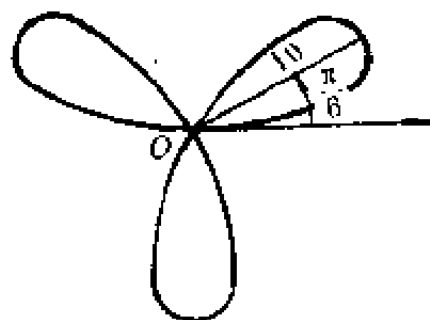


图 1.223

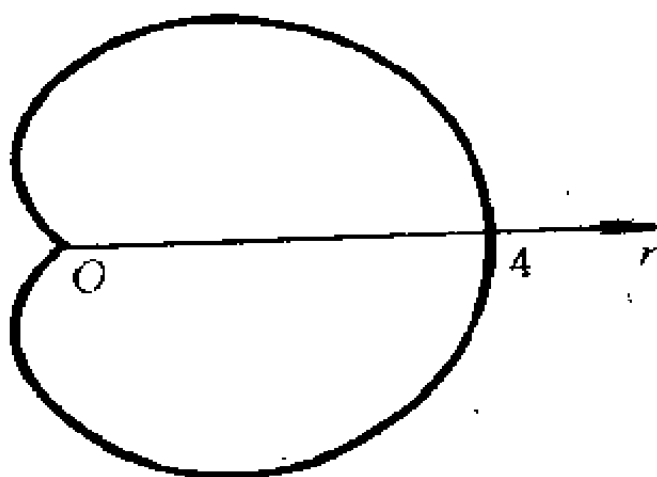


图 1.222

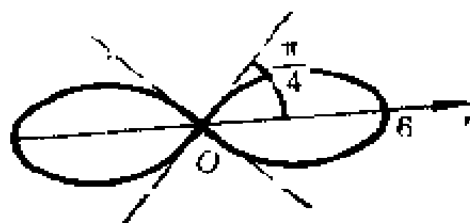


图 1.224

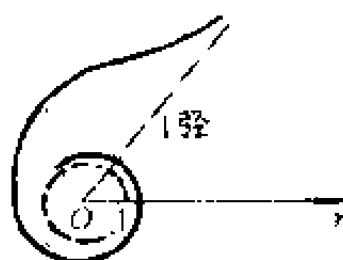


图 1.225

(H) 如图 1.226 所示.

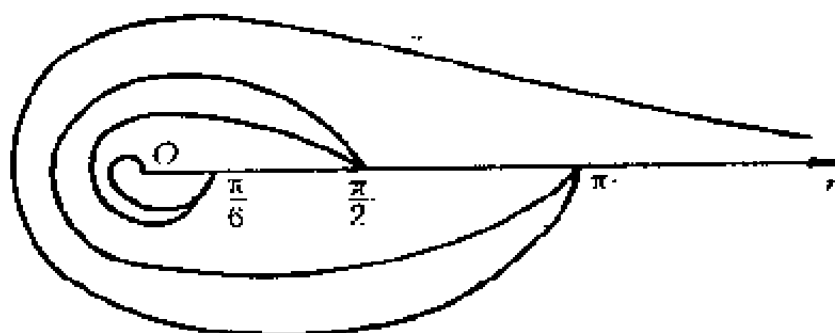


图 1.226

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图

形,以求方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的近似解.

解 如图 1.227 所示.

因 $y|_{x=0} = 1 > 0$,

$$y|_{x=0.4} = -0.136,$$

所以,在 0 与 0.4 之间有一实根,
约为 0.35.

同法可求得其它二根为 1.53 及
-1.88.

用图解法解下列方程式:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$
的图形,它们的交点的横坐标
即所求之根(图 1.228).

在图示的根 x_0 邻近研究函
数 $f(x) = x^3 - 4x - 1$,若 $f(x_0 - \delta) \cdot f(x_0 + \delta) < 0$,则根 x_0 界
于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间,其中 δ 为
很小的某个正数.下列各题同.

经判别,根的近似解为

$$-1.86; -0.25; 2.11.$$

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$
的图形.如图 1.229 所示.

交点的横坐标即所求之根,其近

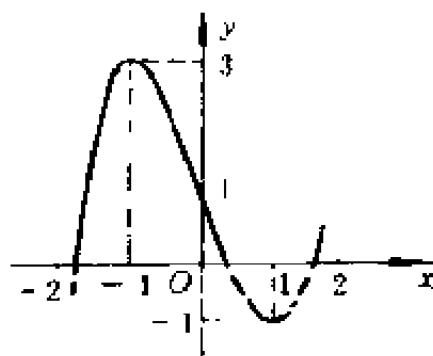


图 1.227

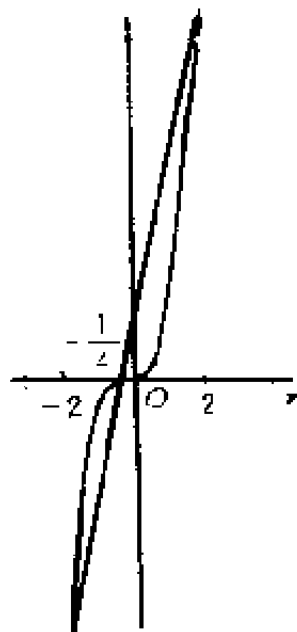


图 1.228

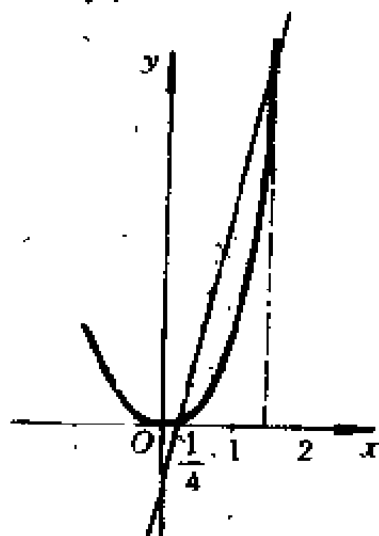


图 1.229

似值为 0.25; 1.49.

375. $x = 2^{-x}$.

解 作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图形, 如图 1.230 所示. 交点的横坐标为 0.64, 此即所求之根的近似值.

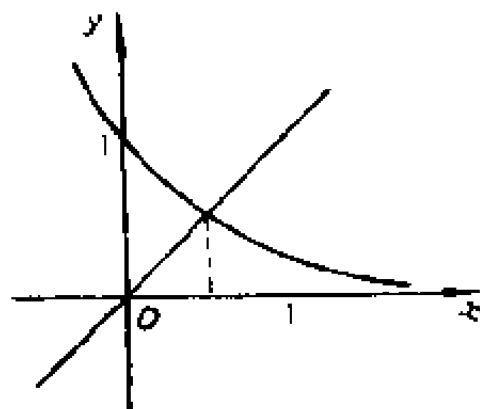


图 1.230

376. $\lg x = 0.1x$.

解 作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形, 如图 1.231 所示.

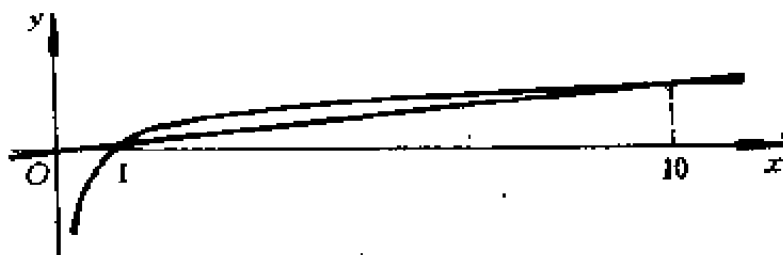


图 1.231

交点的横坐标为 1.37 及 10, 此即所求之根, 前者为近似值, 后者为精确值.

377. $10^x = x^2$.

解 作函数 $y = 10^x$ 及 $y = x^2$ 的图形, 如图 1.232 所示. 交点的横坐标为 -0.54, 此即所求之根的近似值.

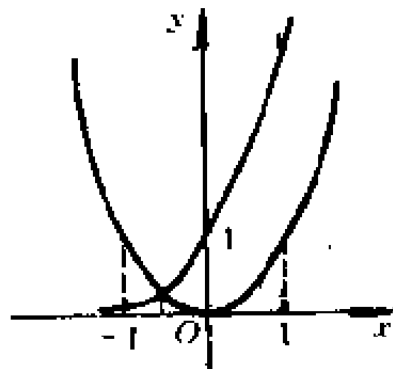


图 1.232

378. $\operatorname{tg} x = x (0 \leq x \leq 2\pi)$

解 作函数

$$y = \operatorname{tg} x \text{ 及 } y = x$$

的图形,如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49,此即所求之根,前者为精确值,后者为近似值.

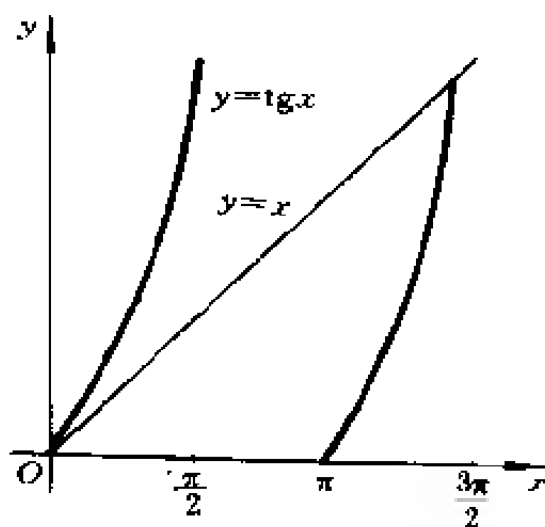


图 1.233

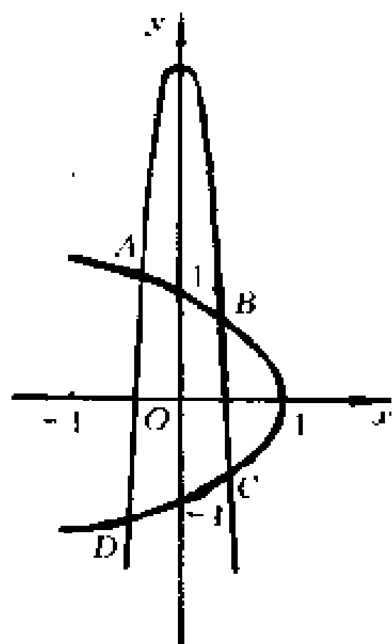


图 1.234

用图解法以解下列方程组:

379. $x + y^2 = 1, 16x^2 + y = 4.$

解 作函数

$$y^2 = 1 - x \text{ 及 } -y + 4 = 16x^2$$

的图表,如图 1.234 所示.

交点为点 A, B, C 及 D, 它们的一对坐标即所求之解 (近似值):

$$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19 (A \text{ 点})$$

$$x_2 = 0.45, y_2 = 0.74 (B \text{ 点})$$

$$x_3 = 0.54, y_3 = -0.68 (C \text{ 点});$$

$$x_4 = -0.57, y_4 = 1.25 (D \text{ 点}).$$

380. $x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2).$

解 作函数

$$x^2 + y^2 = 100$$

及 $y = 10(x^2 - x - 2)$

的图形,如图 1.235 所示.

交点为点 A, B, C 及 D ,
它们的一对坐标即所求之
解(近似值);

$$x_1 = -1.30;$$

$$y_1 = 9.92(A \text{ 点});$$

$$x_2 = 2.30,$$

$$y_2 = 9.73(B \text{ 点});$$

$$x_3 = 1.62,$$

$$y_3 = -9.87(C \text{ 点});$$

$$x_4 = -0.62, y_4 = -9.98(D \text{ 点}).$$

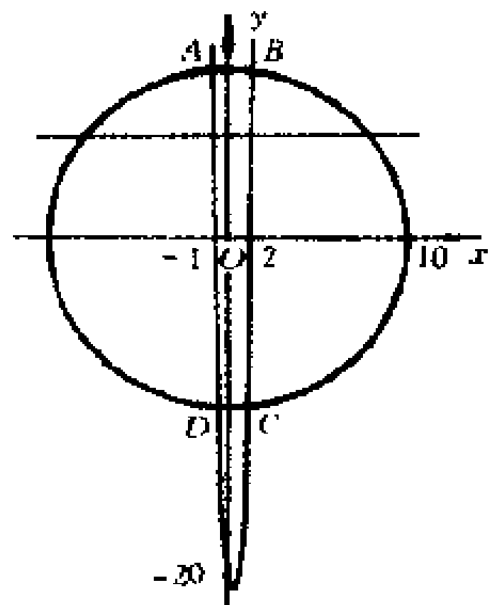


图 1.235

§ 5. 函数的极限

1° 函数的有界性 设存在有某两数 m 和 M , 使得

$$\text{当 } x \in (a, b) \text{ 时, } m < f(x) < M,$$

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上为有界的.

数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的下确界,

而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的上确界.

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a, b) 上的振幅.

2° 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

表示对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$, 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 有下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是: 对于每一个数列 $x_n \rightarrow a (n = 1, 2, \dots)$, 下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

哥西判别法. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在, 当而且仅当, 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得, 只要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的.

3° 单侧的极限 若

$$\text{当 } 0 < a - x < \delta(\varepsilon) \text{ 时, 有 } |A' - f(x)| < \varepsilon,$$

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

同样, 若当 $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|A'' - f(x)| < \varepsilon$, 则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为:

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4° 无穷极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要是

$$0 < |x - a| < \delta(E), \text{ 则有 } |f(x)| > E.$$

5° 子列极限 若对于某数列 $x_n \rightarrow a$ 有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

则称数(或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 和 } \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件.

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $x = \frac{m}{n}$, 则 $f(x) = n$,

式中 m 和 n 为互质的整数,且 $n > 0$;

若 x 为无理数,则

$$f(x) = 0.$$

证明此函数在每一点 x 为有穷的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

证 任给 $x_0 > 0$, 当 x_0 固定时, $f(x_0)$ 值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密, 故在 x_0 的任何邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内总有无多个有理数. 下面证明对于任给的 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是无界的. 若不然, 存在 $M > 0$, 使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时,

$$|f(x)| \leq M.$$

于是, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k 是与分母互质的整数, $[M]$ 为 M 的整数部分. 由

于这些有理数都在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中, 故有

$$(x_0 - \delta)[M] < k < (x_0 + \delta)[M],$$

上式表明在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数仅为有限个, 这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是, 本题所定义的函数 $f(x)$ 在每一点 x (有穷) 的任何邻域中是无界的.

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区间, (b) 闭区间内的每一点确定而有界, 则此函数在这给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的?

举出适当的例子.

解 (a) 一般地说, 不一定. 例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内每一点确定而有界, 但它在 $(0, 1)$ 内无界.

(b) 是有界的. 事实上, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 则存在 $x_n \in [a, b]$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 取子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. 显然, $f(x)$ 在 x_0 无界 (即在 x_0 的任何邻域中无界), 矛盾.

383. 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

在间隔 $-\infty < x < +\infty$ 中是有界的.

证 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+1}{1} = 2$.

当 $|x| > 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+x^2}{1+x^4} < 1$.

因而, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $|f(x)| < 2$. 即函数 $f(x)$ 是有界的.

384. 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的, 但当 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时, $f(x) = 0$; 而当 $x = \frac{1}{k\pi}$ 时,

$f(x) = (-1)^k k\pi$. 于是当 $k \rightarrow \infty$ 时, 点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 及 $\frac{1}{k\pi}$

均在点 $x = 0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k \cdot k\pi| \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$, 故函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交, 即 $f(x) = 0$ (这样的数 x 的集合是无限的). 因而, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 又不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < \varepsilon$ 内的有界性.

解 上方有界, 它小于 $|\ln \varepsilon|$. 下方无界.

386. 证明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m_0 = 0$ 和上确界 $M_0 = 1$.

证 $1 > f(x) \geq 0$, 且 $f(x)$ 单调上升趋近于 1, 所以,

$$m_0 = 0, M_0 = 1.$$

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

解 $m_0 = f(a)$, $M_0 = f(b)$, 其中 m_0 及 M_0 代表下确界及上确界, 以下各题均采用此符号.

求函数的下确界和上确界:

388. $f(x) = x^2$ 在 $(-2, 5)$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 25.$

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 1.$

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 由于 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内为增函数, 而在 $(1, +\infty)$ 内为减函数, 且 $f(1)$ 存在, 所以,

$$m_0 = 0, M_0 = f(1) = 1.$$

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 由 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 知 $m_0 = f(1) = 2, M_0 = +\infty.$

392. $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 $m_0 = -1, M_0 = 1.$

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内.

解 由 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知 $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}.$

394. $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内.

解 $m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}, M_0 = f(2) = 4.$

395. $f(x) = [x];$ (a) 在 $(0, 2)$ 内, (b) 在 $[0, 2]$ 内.

解 (a) $m_0 = 0, M_0 = 1;$

(b) $m_0 = 0, M_0 = 2.$

396. $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内.

解 $m_0 = 1, M_0 = 1.$

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1, 3);$ (b) $(1.9, 2.1);$

(B)(1.99, 2.01) (r)(1.999, 2.001).

解 (a) 振幅以 ω 表示之, $\omega = M_0 - m_0$

因为 $m_0 = 1, M_0 = 9$, 所以

$$\omega = 8.$$

$$(b)m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2,$$

$$\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8.$$

$$(B)\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08.$$

$$(r)\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008.$$

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅:

$$(a)(-1, +1); (b)(-0.1, 0.1);$$

$$(B)(-0.01, 0.01); (r)(-0.001, 0.001).$$

$$\text{解 } (a)\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$$

$$(b)\omega = \pi;$$

$$(B)\omega = \pi;$$

$$(r)\omega = \pi.$$

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 内的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使它们在最后的二关

系中是:(a) 等式的情形,(6) 不等式的情形.

证 因为

$$m[f_1] \leq f_1 \leq M[f_1]$$

及

$$m[f_2] \leq f_2 \leq M[f_2],$$

所以,

$$m[f_1] + m[f_2] \leq f_1 + f_2,$$

从而有

$$m[f_1] + m[f_2] \leq m[f_1 + f_2].$$

又因

$$f_1 + f_2 \leq M[f_1] + M[f_2],$$

所以,

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

(a) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a, b) 内具有相同的单调性, 且 m 及 M 均为有限时, 取等式.

(6) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2$ 在区间 $(-1, 1)$ 内

$$m[f_1] = 0, M[f_1] = 1;$$

$$m[f_2] = -1, M[f_2] = 0.$$

又因为 $f_1 + f_2 = 0$, 所以

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

此时

$$m[f_1 + f_2] > m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] < M[f_1] + M[f_2].$$

取不等式的符号.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a, +\infty)$ 内, 并且在每一个闭区

间 $[a, b]$ 上是有界的. 假定

$$m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} f(t)$$

及

$$M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t).$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图形, 设

$$(a) f(x) = \sin x, \quad (b) f(x) = \cos x.$$

解 (a) 如图 1.236 所示. (b) 如图 1.236 所示

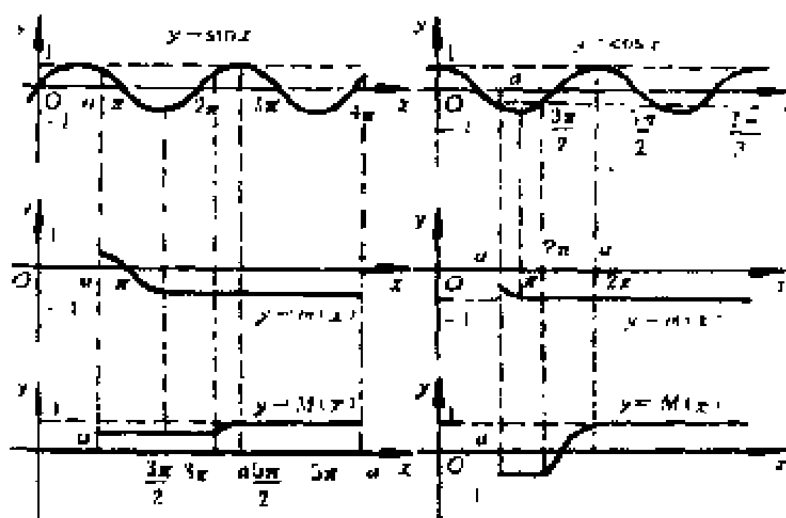


图 1.236

401. 利用 $(\epsilon - \delta)$ 论证法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ					

$$\text{证 } |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$$

先限制 $|x - 2| < 1$, 即 $1 < x < 3$, 则

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2|,$$

取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$. 于是, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时,

$$|x^2 - 4| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	...

402. 以《 $E - \delta$ 》的说法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	...
δ					...

证 任给 $E > 0$,

要使 $\frac{1}{|1-x|^2} > E$,

只要 $0 < |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{E}}$,

又只要 $0 < |x - 1| < \frac{1}{E} (E > 1)$,

取 $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{E}\right\}$,

则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{(1-x)^2} \right| > E,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

E	10	100	1000	10000	...
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...

403. 利用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \quad (6) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

举出适当的例子.

解 (a) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \epsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

例如, $f(x) = x + 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(6) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \epsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.

例如,

$$\text{若 } f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{当 } x \leq 1; \\ 2, & \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$

(B) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时

$$|f(x) - b| < \epsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

例如本题(6)之例, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

利用不等式表示下列各式,并举出适当的例子:

$$404. (a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b; \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

解(a) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\text{此即} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

(b) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\text{此即} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(B) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\text{此即} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

例如, 对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

$$405. (a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty; \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \quad (r) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty;$$

$$(д) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty; \quad (e) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty;$$

$$(ж) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty; \quad (з) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty;$$

$$(и) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

解(a) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty.$$

(6) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$

例如, $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

(B) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

(r) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{1-x}]}}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(d) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a-x < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x-a < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{x-1}]}}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x-a < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x-a < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty.$$

406. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;
 (в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; (г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 (д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; (е) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$;
 (ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$; (з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
 (и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

解 (a) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = x^3$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(б) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

(в) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

(г) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x^2]}x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

(д) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x]}x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

407. 命 $y = f(x)$. 利用不等式表示下列各情况:

(a) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(б) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(в) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(г) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(д) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(e) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(ж) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(з) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(и) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(к) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(л) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(м) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +0$.

举出适当的例子.

解 (a) 任给 $\epsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \epsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b - 0$;

或

$$\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } y \rightarrow b - 0.$$

例如, $y = -|x|$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(б) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b - 0$.

例如, $y = x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 - 0$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(в) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 + 0$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(г) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |a - x| < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = |x|$, 即有

当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(д) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 - 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(е) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 + 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(ж) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{|x|}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(з) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(и) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(к) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{|x|}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(л) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(M) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

408. 设

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_r,$$

式中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 为实数.

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty$.

证 不妨设 $a_0 \neq 0$, 则

$$|p(x)| \geq |a_0| \cdot |x|^n \cdot \left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right|,$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 故存在 $E_1 > 0$, 使当 $|x| > E_1$ 时, 恒有

$$\left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right| > \frac{1}{2},$$

从而有

$$|p(x)| > \frac{1}{2} |a_0| \cdot |x|^n.$$

任给 $M > 0$, 设

$$E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

取

$$E = \max(E_1, E_2),$$

则当 $|x| > E$ 时, 恒有

$$|p(x)| > M,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty.$$

409. 设:

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

证 分子分母同除以 x^m , 得

$$R(x) = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + b_m x^{-m}}.$$

当 $n > m$ 时, 分子趋于无穷, 分母趋于 b_0 ,

所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty.$$

当 $n = m$ 时, 分子趋于 a_0 , 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}.$$

当 $n < m$ 时, 分子趋于 0, 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0.$$

410. 设:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 且

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}?$$

解 若 a 仅为 $P(x) = 0$ 及 $Q(x) = 0$ 的一重根, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x) = 0$ 的 n 重根, 而为 $Q(x) = 0$ 的 m 重根, 则当 $n > m$ (n, m 均大于 1) 时, 此极限为 0; 当 $n < m$ 时, 此极限为 ∞ ; 当 $n = m$ 时, 此极限为一不等于零的值.

总之, 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为零, 或为 ∞ , 或为不等于零的值.

求下列各式之值:

$$411. (a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$412. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3$,
于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6. \end{aligned}$$

$$413. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{x^2 + 1} \\ = 10. \end{aligned}$$

$$414. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\ = & \frac{[1 + nm x + \frac{1}{2!} n(n-1) m^2 x^2 + \cdots + m^n x^n]}{x^2} \\ & - \frac{[1 + mn x + \frac{1}{2!} m(m-1) n^2 x^2 + \cdots + n^m x^m]}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{**}$$

$$= \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x),$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

*) $o(x)$ 表示当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

$$415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

解 分子的最高次方为 5 次, 分母的最高次方也为 5 次, 因而当 $x \rightarrow \infty$ 时, 此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

$$416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

解 分子与分母的最高次方相同, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

$$417. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 分子的最高次方为

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

它与分母的最高次方相同, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$418. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$419. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$420. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = 1.
 \end{aligned}$$

*) 原书 419 题与 420 题相同.

$$421. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^3 + 16}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^3 + 16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$422. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$423. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \\
 &= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.
 \end{aligned}$$

$$424. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & x + x^2 + \cdots + x^n - n \\
 &= (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1) \\
 &= (x-1)[1 + (x+1) + \cdots \\
 &\quad + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)] \\
 &= (x-1)[n + (n-1)x + (n-2)x^2 \\
 &\quad + \cdots + x^{n-1}].
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} [n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}] \\
 &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$425. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} \\ &= \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

$$426. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

解 设 $x = a + y$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow 0$.

代入, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a + y)^n - a^n - na^{n-1}y}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n}{2}(n-1)a^{n-2} + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y \right. \\ &\quad \left. + \cdots + y^{n-2} \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}. \end{aligned}$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

解 设 $x = 1 + y$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $y \rightarrow 0$. 代入, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y) + n}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y + \cdots + y^{n-1} \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

428. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ (m 和 n 为自然数).

解 当 $m = n$ 时, 此极限显然为零.

当 $m \neq n$ 时, 不失一般性, 假设 $m < n$, 且

$$m + l = n.$$

此时

$$\begin{aligned} & \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \\ &= \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \frac{-l - lx - \cdots - lx^{m-1} + mx^m + mx^{m+1} + \cdots + mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})} \\ &= -\frac{mx^{m+l-2} + 2mx^{m+l-3} + \cdots + mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1-x+\cdots+x^{m+l-1})} \\ &\quad - \frac{l(m-1)x^{m-2} + l(m-2)x^{m-3} + \cdots + l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\ &= -\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)] + l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn} \\ &= -\frac{\frac{ml(l-1)}{2} + \frac{ml(m+1)}{2}}{mn} = -\frac{ml(m+l)}{2mn} \\ &= -\frac{m-n}{2}. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时, 上述结果就等于零. 即上述结果对 $m = n$ 的情况仍然适用.

总之, 不论 m 及 n 为任何的自然数, 均有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}.$$

$$429. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ (n-1)x + \frac{a}{n} (1+2+\cdots+(n-1)) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \left(x + \frac{a}{2} \right) \\ &= x + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

$$430. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots \right. \\ & \quad \left. + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{2ax}{n} (1+2+\cdots+(n-1)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^2}{n^2} (1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{n-1}{1} ax + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} a^2 \right\} \\ &= x^2 + ax + \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

$$431. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3} (4n^2 - 1), \\ & 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2(n+1)} = 1$$

$$432. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4} \right)^{*)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*) 利用 3 题及 1 题的结果.

$$433. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2}.$$

解 令

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3 = x_n,$$

$$[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2 = y_n,$$

则 $y_{n+1} > y_n$, 且 $y_n \rightarrow +\infty$, 由于

$$\begin{aligned} & \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n+1)]^2 - [1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2} + \frac{n(3n-1)}{2} \right] (3n+1)} \quad * 3 \\ & \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

利用 143 题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2} = 3.$$

434. 把由抛物线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴及直线 $x = a$ 所围成的曲边三角形 OAM (图 1. 237) 的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n \rightarrow \infty$ 的极限值, 求此面积.

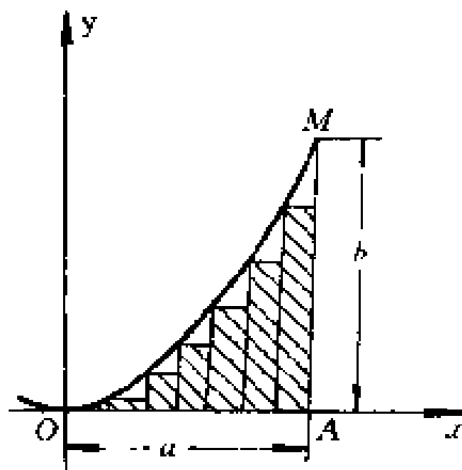


图 1 · 237

解 底的 n 个分点为

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a;$$

它们所对应的高为

$$0, b\left(\frac{1}{n}\right)^2, b\left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots,$$

$$b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

于是, 得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它趋向于 $\frac{ab}{3}$, 即

$$\text{面积 } OAM = \frac{ab}{3}.$$

求极限:

$$435. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$437. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

解 分子分母同乘以它们的共轭因式, 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

$$438. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(2 + \sqrt[3]{x})(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8+x)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -8} \frac{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x} + 3}$$

$$= -2.$$

$$439. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x^2 - a^2}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} (a > 0).$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

$$441. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}{(x^3 + 8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
&= \frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

$$442. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$443. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

444. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ (n 为整数).

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

445. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2} - 1 - x)(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

446. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}$.

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2)}{(x+x^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} \\
& = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^3}}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^3}} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x})}{(x + 2\sqrt[3]{x^3})} \\
& \quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + 2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
& = \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
& \quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$449. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[4]{x+9} - 2)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}$$

$$= \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5}$$

$$= \frac{6048}{1458} = 4 \frac{4}{27}$$

$$450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} + \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^3} \right] \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]}{\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right] \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]} \\
&\quad \cdot \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]}{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{7}{12} + \frac{23x}{48} + \frac{7x^2}{54} + \frac{x^3}{81} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]}{\frac{x}{2} \left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]} \\
&= \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

451. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3(1+x)} + \cdots + (1+x)^4)}{(1+5x) - (1+x)^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3(1+x)} + \cdots + (1+x)^4}{-10 - 10x - 5x^2 - x^3} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

452. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$

解 如果 m 及 n 为正整数, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^n - (1+\beta x)^m}{x(\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} + \dots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(na - m\beta) + (C_n^2 a^2 x + \dots + a^n x^{n-1} - C_m^2 \beta^2 x - \dots - \beta^m x^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} + \dots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}} \\
&= \frac{na - m\beta}{mn} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m = -m'$, $n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数, 则

$$\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+\beta x} = \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+ax}}{\sqrt[n']{1+ax} \cdot \sqrt[m']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于 1, 于是利用本题前半段的结果, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+ax}}{x} = \frac{\beta}{n'} - \frac{a}{m'} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数, 另一个为正整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

453. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$

解 与 452 题相同, 先设 m 及 n 为正整数.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^n (1+\beta x)^m - 1}{x(\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} \cdot (1+\beta)^{m(mn-1)} + \dots + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{na + m\beta + o(x)}{\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} (1+\beta x)^{m(mn-1)} + \dots + 1} \\
&= \frac{na + m\beta}{mn} \\
&= \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

若 m 及 n 为负整数, 则此结果仍然成立. 事实上, 只须设 $m = -m', n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数. 于是,

$$\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1 = \frac{1 - \sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

再利用前半段结果, 即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x})} = -\frac{a}{m'} - \frac{\beta}{n'} = \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中只有一个为负整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因而, 当 m 及 n 为整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

454. 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 又 m 表整数, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{1+P(x)}^{m-1} + \cdots + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}} + \cdots + 1} \\ &= \frac{a_1}{m}. \end{aligned}$$

求下列的极限:

455. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ (m 及 n 表整数).

解 当 m 及 n 为正整数时, 我们有

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1} \rightarrow \frac{n}{m} (x \rightarrow 1).$$

若 m 及 n 为负整数时, 设 $m = -m'$, $n = -n'$,
其中 m' 及 n' 为正整数, 于是

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} \rightarrow \frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} \quad (x \rightarrow$$

1).

当 m 及 n 中只有一个为负整数仍然成立. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = \frac{n}{m} \quad (m \neq 0).$$

$$456. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$$

解 设 $x = t^n$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} \\ &= \frac{(1 - t^{3/4 \cdots n})(1 - t^{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}) \cdots (1 - t^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)})}{(1 - t^n)^{n-1}} \\ &= \frac{(1 + t + t^2 + \cdots + t^{\frac{n!}{2}-1})(1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{3}-1}) \cdots (1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1 + t + \cdots + t^{n!-1})^{n-1}} \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$, 于是上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{3} \cdots \frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}} = \frac{1}{n!},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}} = \frac{a+b}{2}.
 \end{aligned}$$

$$458. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$459. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned}
 &x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \\
 &= \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{1+2t} + 1)^2 - 4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})} \\
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2} \\
&= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 于是上式趋向于 $-\frac{1}{4}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{4}.$$

$$460. \lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right].$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right] - \left[\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right]}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{x \rightarrow 1, 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x + x\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \sqrt{x + x\sqrt{x}}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

461. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

462. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2)^2 - (x^2 - 2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \sqrt{(x^3 + 3x^2)^8(x^2 - 2x)^8} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{\left(1 - \frac{2}{x} \right)^{15}}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

463. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}] \cdot [(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^3-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^3-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

464. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1)(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)} \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right] \left[\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right]} \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

465. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x]$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n) - x^n}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) x^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n a_i}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^j \left(1 + \frac{a_i}{x} \right)^{\frac{n-j}{n}} \right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.
\end{aligned}$$

466. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$ (n 表自然数).

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n \right] = 2^n.$$

467. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$ (n 表自然数).

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} [(x + \sqrt{1+x^2})^{n-1} + (x + \sqrt{1+x^2})^{n-2} \\
&\quad (\sqrt{1+x^2} - x) + \cdots + (\sqrt{1+x^2} - x)^{n-1}] \\
&= 2n.
\end{aligned}$$

468. 设二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b \neq 0$, 试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质.

解 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

不失一般性, 假设 $b > 0$, 于是, 有

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \infty$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} x_1 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= -2c \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \\ &= -\frac{c}{b}. \end{aligned}$$

469. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

求常数 a 和 b .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \\ &= \frac{(1 - a)x^2 - (a + b)x + (1 - b)}{x + 1}. \end{aligned}$$

按假设, 上式的极限为零的必要条件是

$$1 - a = 0 \quad \text{及} \quad a + b = 0,$$

解之, 得

$$a = 1, \quad b = -1.$$

470. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1x - b_1) = 0$$

$$\text{和} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2x - b_2) = 0$$

求常数 a_i 和 $b_i (i = 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt{x^2 - x + 1} - a_1x - b_1 \\ &= \frac{(1 - a_1^2)x^2 - (1 + 2a_1b_1)x + (1 - b_1^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + a_1x + b_1}, \end{aligned}$$

上式极限为零的必要条件是

$$1 - a_1^2 = 0 \quad \text{及} \quad 1 + 2a_1b_1 = 0,$$

解之,得

$$a_1 = \pm 1, \quad b_1 = \mp \frac{1}{2}.$$

同理可得

$$a_2 = \pm 1, \quad b_2 = \mp \frac{1}{2}.$$

求下列的极限:

$$471. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \\ &= 5 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$

$$472. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而 $|\sin x| \leq 1$,

故 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小量, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$$473. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

解 设 $x = \pi + y$, 则当 $x \rightarrow \pi$ 时, $y \rightarrow 0$. 于是,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} \\ &= (-1)^{m-n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin my}{my} \cdot \frac{ny}{\sin ny} \cdot \frac{n}{m} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

$$474. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$475. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$476. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 4x \sin x}{\sin x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2. \end{aligned}$$

$$477. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos x = 4. \end{aligned}$$

$$478. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{2\sin^2 \frac{px}{2} + \sin px} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}} \\ &= \frac{1}{p} \quad (p \neq 0). \end{aligned}$$

$$479. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y}{2 \cos^2 y} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

其中 $x = \frac{\pi}{4} + y$.

480. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

解 设 $x = 1 - y$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi y}{2} \right] = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

481. 证明等式:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$; (b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$;

(c) $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tga} (a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

证 (a) $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|$
 $\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|.$

任给 $\epsilon > 0$, 要使

$$|\sin x - \sin a| < \epsilon,$$

只须 $|x-a| < \epsilon$, 取 $\delta = \epsilon$, 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin a| < \epsilon.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tga}.$$

其中 $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

求下列的极限:

482. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$

483. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \sin \frac{x-a}{2}$
 $= -\sin a.$

484. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x \cos a}$

$$= \frac{1}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} \\ &= - \frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{(x-a)\cos x \cos a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\ &= \frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} \\ &= - \frac{\cos a}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

*) 利用 482 题的结果.

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} - 2\cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \left[\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \right]}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \sin(a+x) \\
&= - \sin a.
\end{aligned}$$

$$489. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} + 2\sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \left[\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \right]}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cos(a+x) \\
&= - \cos a.
\end{aligned}$$

$$490. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}(a+x)] - [\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tga}]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{-\cos a \sin(a+x) - \cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos(a+x)\cos a - \cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2 \cos a \cos(a+2x) \cos^2(a+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{2\sin(a+x)}{\cos a \cos(a+2x) \cos(a+x)} \\
&= \frac{2\sin a}{\cos^3 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$491. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctga}}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctga}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin(a+x) [\sin a - \sin(a+2x)]}{x^2 \sin a \sin^2(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin a \cdot \sin(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \frac{2\cos a}{\sin^3 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$492. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} [\cos x - \cos(2a+3x)] - \sin^2 a}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(2a + 3x) - (1 - \cos 2a)}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3 \sin \left(2a + \frac{3x}{2} \right)}{2} \right] \\
&= \frac{3}{2} \sin 2a.
\end{aligned}$$

493. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.
\end{aligned}$$

494. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

解 因为

$$\begin{aligned}
&1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \cos 2x \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cos 4x \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x \\
&= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x) \\
&= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).
\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)}{2\sin 2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 3x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4}(4 + 16 + 36) = 14.
\end{aligned}$$

$$495. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}.$$

解 设 $x = \frac{\pi}{3} + y$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 - \cos y + \sqrt{3} \sin y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \sin \frac{y}{2} + \sqrt{3} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$496. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\cos^2 x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{-\frac{1}{2} \cos^2 x} = -24.$$

$$497. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2},$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x} \right) \left(\frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x} \right) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^4 a - 1)}{x^2 (1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x)} = \operatorname{tg}^4 a - 1 = \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a}$$

$$(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$498. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x - \cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$$

$$499. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \\
&\quad \frac{1}{\cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

500. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

501. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt[3]{\cos x}(1 - \sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \dots + \sqrt[6]{\cos^5 x}} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \cdots + \sqrt[6]{\cos^5 x}} \\ = \frac{1}{12}.$$

$$502. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$503. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \left[\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}} \right]^2 \cdot \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}} = 0. \end{aligned}$$

$$504. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

解 不妨令 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 则

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \\
&\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3.
\end{aligned}$$

505. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$

解 $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$

$$= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$

($x \rightarrow +\infty$), 所以,

$$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

又因 $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1,$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$

506. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \frac{1}{2};$

$$\begin{aligned}
&(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(B)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = 1^0 = 1,
 \end{aligned}$$

$$507. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0.$$

$$508. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

解 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

$$\text{及} \quad \frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x} - 1} \rightarrow -\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0.$$

$$509. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$$

解 因为 $\left| \sin \frac{2\pi n}{3n+1} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} = 0.$$

$$510. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

解 因为当 $x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$ 时,

$$1 < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < +\infty$$

及 $\operatorname{tg} 2x \rightarrow -\infty$,

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

$$511. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1.$$

$$512. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{2}} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2} \cdot 2 + 1} = e^2.$$

$$513. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1.$$

$$514. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-2)} = e^{-2}.$$

$$515. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a + a} = e^{2a}.$$

$$516. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$$

解
$$\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \cdot \left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}} \right)^x$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x + \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}}} \right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}} \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right) - \frac{b_2}{a_2}}$$

(1) 当 $a_1 = a_2 = a$ 时,

$$\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1 - b_2}{a}}} \right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1 - b_2}{a}} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a} - \frac{b_2}{a}}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = e^{\frac{b_1 - b_2}{a_1}}.$$

(2) 当 $a_1 < a_2$ 时, $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$,

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

而
$$\left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}} \right)^x \rightarrow e^{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = 0.$$

(3) 当 $a_1 > a_2$ 时, $\frac{a_1}{a_2} > 1$.

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \rightarrow +\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = +\infty.$$

517. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \cos^2 x} = e.$

518. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x} = e^{-1}.$

519. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}}\right]^{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \sin x)}} = e^0 = 1.$

520. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow a} \left[1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin a}} \\
&= e^{\operatorname{ctga} *} (a \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)
\end{aligned}$$

*) 利用 482 题的结果.

521. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 $\left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1 + \frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} \right]^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}$

因为

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} &= \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 x}{x^2} \\
&= \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + 2\cos x) = \frac{1 + 2\cos x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

($x \rightarrow 0$),

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

522. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg} x - 1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \frac{-2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}} = e^{-1}.$$

523. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{-\frac{\operatorname{tg} x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{-\operatorname{ctg} x}{2}} = e^0 = 1.
 \end{aligned}$$

$$524. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^{\operatorname{ctg} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x}} \right]^{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} \right)} = e^{-2}.
 \end{aligned}$$

$$525. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x,$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \\
 &= \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)}
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1) &= \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{2 \sin \frac{1}{2x} \sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x} \cdot 2} \\
 &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$526. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos \sqrt{x} \cdot 1+1)}{\cos \sqrt{x} - 1} (\cos \sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot *)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

*) 原题为 $x \rightarrow 0$, 应改为 $x \rightarrow +0$.

* *) 利用 529 题的结果.

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{x+1}} \right)^{\frac{n-1}{x+1} \cdot (x+1)+1} = e^{x+1}.$$

$$528. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \\ &= \ln e = 1. \end{aligned}$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}} \right)^{\frac{a}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

$$532. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sin \ln(x+1) - \sin \ln x \\ &= 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}. \end{aligned}$$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

所以

$$\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \rightarrow 0;$$

又因 $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$ 为有界函数, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$$

$$533. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{10 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$534. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2e^{-3x} + 1)}{2x + \ln(3e^{-2x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} \ln(2e^{-3x} + 1)}{2 + \frac{1}{x} \ln(3e^{-2x} + 1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 - h^2) - \log x^2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \log \left(1 - \frac{h^2}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{h^2}} \right) = -\frac{1}{x^2} \log e. \end{aligned}$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin bx}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{1}{\sin bx}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sqrt{2} \sin ax}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sqrt{2} \sin ax} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b}} \\
&= \ln e^{\frac{2a}{b}} = \frac{2a}{b}.
\end{aligned}$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

$$540.^+ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right] = \ln 1 = 0.$$

$$541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} (a > 0).$$

解 设 $a^x - 1 = y$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} \\ &= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

542. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} (a > 0).$

解
$$\begin{aligned}\frac{a^x - x^a}{x - a} &= \frac{a^a \left(a^{x-a} - \left(\frac{x}{a} \right)^a \right)}{x - a} \\ &= a^a \cdot \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} = a^a \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{x - a} \\ &= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} = a^a \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a},\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow a$ 时, 等式第一项趋向 $a^a \ln a$, 而第二项趋向 $a^a \cdot 1 \cdot 1 = a^a$, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a = a^a \ln \frac{a}{e}.$$

543. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} (a > 0).$

解
$$\frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \cdot \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \cdot \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a}.$$

而当 $x \rightarrow a$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{x \ln x - a \ln a}{x - a} &= \frac{x \ln x - x \ln a}{x - a} + \ln a \\ &= \frac{x}{a} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{\frac{x-a}{a}} + \ln a \rightarrow 1 + \ln a = \ln ea.\end{aligned}$$

又

$$\frac{e^{x \ln x} - a^a - 1}{x \ln x - a \ln a} \rightarrow 1 (x \rightarrow a),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln e a.$$

544. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{e^x}{x} \cdot e^{-x}} = e \cdot e = e^2.$

545. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 $\left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
 $= \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)}} \right]^{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)} \cdot \frac{x^2 - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}}.$

因为

$$\begin{aligned} & \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)} \\ &= \frac{1}{1 + x \cdot 3^x} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) \rightarrow \\ & \ln 2 - \ln 3^{*}) = \ln \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

*) 利用 541 题的结果.

546. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^n = e^2.
 \end{aligned}$$

$$547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} [e^{(\alpha - \beta)x} - 1]}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} x \sin \frac{\alpha - \beta}{2} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha - \beta)x} - 1}{(\alpha - \beta)x} \cdot \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} x}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2} x} \cdot \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} x} \\
 &= \ln e^{*}) = 1.
 \end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$548. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{x^a - a^a}{x^\beta - a^\beta} &= a^{a-\beta} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{\left(\frac{x}{a} \right)^\beta - 1} \\
 &= a^{a-\beta} \cdot \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{\beta \ln \frac{x}{a}}{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1} \cdot \frac{a}{\beta}.
 \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow a$ 时, $\ln \frac{x}{a} \rightarrow 0$, 于是上式趋向 $\frac{a}{\beta} a^{a-\beta}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

$$549. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} a^b \cdot \frac{a^{x-b} - 1}{x - b} = a^b \ln a^{**}.$$

*) 利用 541 题的结果.

$$550. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^h} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^x \ln^2 a^{**}. \end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$551. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b} \cdot [2(a+b)] + (a+b)}} \\ &= \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x^{(*)}.$$

*) 利用 541 题的结果.

$$553. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1)}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+n}\right)} = \ln x. \end{aligned}$$

$$554. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}} \right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1} \cdot \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a} \ln b} \\ &= \sqrt[n]{b}. \end{aligned}$$

$$555. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^n \\
&= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0).
\end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$556. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 利用 555 题的方法:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \cdot \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x}} \\
&= \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

$$557. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 利用 541 题的结果, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1} - a - b - c}{x(a + b + c)} \\
&= \frac{1}{a + b + c} \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{a^x - 1}{x} + b \cdot \frac{b^x - 1}{x} + c \cdot \frac{c^x - 1}{x} \right) \\
&= \ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1} \right) \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)} \\
&= (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.
\end{aligned}$$

$$558. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x - b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x}{a^x} \cdot \frac{a^x + b^x}{a^x - b^x}} \right)^{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x} \cdot \frac{a^x + b^x}{a^x - b^x}} \\
 &= \left[x \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) - \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right] \cdot \frac{1}{a^x + b^x} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}(\ln a - \ln b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.
 \end{aligned}$$

$$559. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right)^2} \\
 &= (\ln a - \ln b) \cdot \frac{1}{(\ln a - \ln b)^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b} \\
 &= \left(\ln \frac{a}{b} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$560. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \rightarrow a} a^{x^a} \cdot \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} = a^{a^a} \ln a.$$

$$561. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}.$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解} \quad (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1 + 2^x)} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-x}
 \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0^{*}) = 0.$$

*) 利用 529 题的结果.

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$562. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x \ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)}{\frac{x}{3}} \\ &= 3 \ln 2 = \ln 8. \end{aligned}$$

$$563. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2. \quad *$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} \cdot \ln 2 \\ &= -\ln 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = -\ln 2. \quad *) \end{aligned}$$

*) 利用 529 题的结果.

564. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

证 当 $x \geq 1$ 时, 存在唯一的正整数 k , 使

$$k \leq x < k+1.$$

于是当 $n > 0$ 时, 我们有

$$\frac{x^n}{a^x} < \frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及

$$\frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $k \rightarrow +\infty$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{(*)} = 0$$

及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{(*)} = 0.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

*) 利用 60 题的结果.

565. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg_a x}{x^\epsilon} = 0 \quad (a > 1, \epsilon > 0).$$

证 设 $\log_a x = y$, 则 $x = a^y$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(a^y)^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\epsilon}}}{a^y} \right)^\epsilon = 0^{(*)},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0.$$

*) 利用 564 题的结果.

求下列的极限:

$$566. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x^2 e^{-x}} \cdot x e^{-x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x^4 e^{-2x}} \cdot x^3 e^{-2x}} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

其中利用了结果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a^{-x} = 0 \quad (n > 0, a > 1),$$

因而

$$x^2 e^{-x} \rightarrow 0 \text{ 及 } x^4 e^{-2x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$567. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x} \cdot x e^x}{\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \sqrt{1 + x^2} = 1. \end{aligned}$$

$$568. \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2 + 2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+2}} \\
&= \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.
\end{aligned}$$

569. $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{\ln a + \ln x}{\ln x - \ln a} \right)^{\ln x + \ln(\ln a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}} \\
&= \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.
\end{aligned}$$

570. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right].$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)}{\ln^2 \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left\{ \ln \left[1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right] \right\}^{\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{\ln^2 \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \cdot \frac{(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \frac{2}{(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} \\
& \qquad \qquad \qquad \left(\frac{2}{x-1} \right)^2 \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} \\
& \qquad \qquad \qquad \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2}{2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right] \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right]} \\
& = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

$$571. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} \\
& \qquad \qquad \frac{\sin x}{x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}(1 + \sqrt{1+x\sin x})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \\
& \qquad \qquad -2\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} \sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\quad}{x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x - e^{-x})}{2}} \cdot \frac{x^2(e^{4x} - 1)}{4x^3 e^{2x}} \right] \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = -2.
\end{aligned}$$

573. $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + 2(e^{\frac{x}{x+1}} - 1) \right] 2e^{\frac{1}{x+1}-1} \right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1} \cdot \frac{e^{\frac{x}{x+1}} - 1}{\frac{x}{x+1}}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

574. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (-x+1)]^{\frac{1}{1-x} \cdot \frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

575. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x})(1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x})}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{(\alpha+\beta) \ln \sin x} \right) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\beta \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\beta \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}{\sqrt{\alpha\beta} \cdot \ln \sin x} \right) = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.
\end{aligned}$$

注 其中, x 在 $\frac{\pi}{2}$ 的附近变化, 故 $\sin x > 0$.

$$576^+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \quad (\text{参见 340 题}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x} \ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \cdot e^x}{\ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &\quad \cdot \left(\frac{3x}{e^{3x} - 1} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$577. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x} \\ &= 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \rightarrow 1 \\ &\quad (x \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{\operatorname{ch} x}$$

$$= \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}.$$

578. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln 2 - \ln(1 + e^{2x})]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln 2 - \ln(e^{-2x} + 1)] = \ln 2.$$

579. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} \right) (e^{2x} + 1)}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \right) 2}{1} = 1.$$

580. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}.$

解 $\left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}}}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}$

$$= \left[1 + \frac{1}{\frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n}}} \right] \frac{\frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{\pi^2 \left(e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n} \right)}{2\cos \frac{\pi}{n}}},$$

因为

$$\begin{aligned} & n^2 \left(e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n} \right) \\ &= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right] \\ &= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 4\sin^2 \frac{\pi}{2n} \right] \\ &= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - 1}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2n}} - 1}{-\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2 + \pi^2 \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right]^2 \\ &\longrightarrow 2\pi^2 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]^{n^2} = e^{\pi^2}.$$

581. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$

582. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$583. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$584. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{3}{4}\pi.$$

$$585. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+h)} \right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

*) 其中利用了结果: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{1-x} \right] = 2.$$

$$587. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}} \cdot \frac{n}{n(x^2+1)+x} \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left(\frac{1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \right)^{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{x}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}} \right] = \frac{e^x}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

$$588. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1^{*}).
 \end{aligned}$$

*) 其中利用了结果: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

$$590. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{\pi}{(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{\sin(\pi \sqrt{1+n^2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{\pi}{(-1)^n} \cdot \frac{-1}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{\pi}{(-1)^n} \cdot \frac{n\pi - \pi \sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{n(\pi \sqrt{1+n^2} - n\pi)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n(n^2+1-n^2)}} \\ &= e^{\frac{2}{\pi}} \quad (n\pi - \pi \sqrt{1+n^2} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$$591. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}} = 0^{*}).$$

*) 利用 564 题的结果.

$$592. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0^{*}).$$

*) 利用 565 题的结果.

$$593. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x); \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty;$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2}.$$

$$594. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} \quad *) = -1$$

*) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $x = -\sqrt{x^2}$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} \quad *) = 1.$$

*) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x = \sqrt{x^2}$.

$$595. (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2};$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$596. (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1;$

(b) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$

597. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x};$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} \right] = 0;$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right] = 1.$

598. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$

(b) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$

证 (a) 当 $x < 0$ 时, 及当 $|x|$ 充分大以后,

$$\frac{2x}{1+x} > 2.$$

于是

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$

(b) 当 $x > 0$ 时,

$$0 < \frac{2x}{1+x} < 2.$$

于是,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$

599. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0;$

(b) 当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0.$

证 (a) 当 $x < 0$ 时,

$$0 < 2^x < 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0$;

(b) 当 $x > 0$ 时,

$$2^x > 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0$.

600. 设 $f(x) = x + [x^2]$, 求 $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

解 $f(1) = 2$;

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + [x^2]) = 1 + 0 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + [x^2]) = 1 + 1 = 2.$$

601. 设 $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

解 $f(n) = 0$;

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^{n-1};$$

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^n.$$

求:

$$602. \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ 为有界函数, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

$$603. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

解 因为

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

当 $x > 0$ 时

$$1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1,$$

当 $x < 0$ 时,

$$1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1,$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

$$604. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\pi \sqrt{n^2 + 1} + n\pi} = 0.$$

$$605. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2 + n})]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - \cos[2\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)]\} = 1.$$

$$606. \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n.$$

解 先设 $0 \leq x \leq \pi$, 这时, $0 \leq \sin x \leq x$,

$$0 \leq \sin(\sin x) \leq \sin x,$$

依次类推. 用数学归纳法, 即可证得

$$0 \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \downarrow},$$

这说明 $\overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow}$ 随着 n 的增大而单调减少, 于是由其有界性知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = \mu$$

存在有限, 且 $0 \leq \mu \leq 1$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \downarrow})$$

即

$$\sin \mu = \mu,$$

故

$$\mu = 0.$$

同法可证, 当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = 0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性(周期为 2π), 得知对任一 x 值, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = 0.$$

607. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow 4} \psi(x) = B$, 由此是否可推出

$$\lim_{x \rightarrow 2} \psi(\varphi(x)) = B?$$

研究这个例子: 当 $x = \frac{p}{q}$ (其中 p 和 q 是互质的整

数) 时, $\varphi(x) = \frac{1}{q}$; 当 x 为无理数时, $\varphi(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) = 1$; 当 $x = 0$ 时, $\psi(x) = 0$; 并且 $x \rightarrow 0$.

解 不一定, 例如对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ (其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质) 时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 (= A)$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1,$$

但是, 极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

却不存在. 事实上, 当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时, 有 $\varphi(x_n) = 0$, 因此 $\psi(\varphi(x_n)) = 0 (n = 1, 2, \dots)$; 而当 x 以一串有理数列 x'_n 趋近于零时, $\varphi(x'_n) \neq 0$, 因此, $\psi(\varphi(x'_n)) = 1 (n = 1, 2, \dots)$. 由此可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

不存在.

608. 证明哥西定理: 若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a, +\infty)$ 上, 且在每一个有穷的区间 (a, b) 内是有界的, 则

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq c > 0),$$

假定在等式右端的极限都存在.

证 (a) 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$. 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x > X_0 + 1$. 于是, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} - A &= \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] + \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \\ &\quad - \frac{(X_0 + \tau)A}{x}. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} &\left| \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{f(X_0 + \tau + n) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A] \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A| \\ &< \frac{1}{n} \cdot \frac{n\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0 \leq \tau < 1);$$

另外, 显然存在正数 X_2 , 使当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\left| \frac{(X_0 + 1)A}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1, X_2\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 必有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

故(a)获证.

(6) 由假定, $f(x) \geq c > 0$. 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A'$. 显然 $A' \geq 0$. 下证 $A' > 0$. 事实上, 若 $A' = 0$, 则存在正数 X_0 , 使当 $x \geq X_0$ 时, 必 $0 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} 0 < \frac{f(X_0+n)}{f(X_0)} &= \frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)} \cdot \frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)} \cdots \\ &\quad \cdot \frac{f(X_0+1)}{f(X_0)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(X_0+n) = 0$, 此显然与 $f(x) \geq c > 0$ 矛盾, 因此, 有 $A' > 0$.

由于 $f(x) \geq c > 0$ 且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内有界, 故函数 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内也有界, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln f(x+1) - \ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln A'.$$

于是, 将(a)的结果用于函数 $\ln f(x)$, 即知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln A'.$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} \\ &= e^{\ln A'} = A'. \end{aligned}$$

证毕.

609. 证明若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有

限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ (或 $-\infty$), *) 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}.$$

证 只要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ 的情形, 这

时要证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (对于 $-\infty$ 的情形, 只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形). 任给 $G > 0$, 必存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$f(x+1) - f(x) > 4G.$$

现设 $x > 2(X_0 + 1)$. 仿 608 题(a)之证, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 由于 $n + 1 > x - X_0 > X_0 + 2$, 故 $n > X_0 + 1 > X_0 + \tau$. 从而 $2n > x$, 即

$$\frac{n}{x} > \frac{1}{2}.$$

又, 我们有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} + \frac{f(X_0 + \tau)}{x},$$

显然

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)] \\ &> \frac{1}{n} \cdot 4nG - 4G, \end{aligned}$$

故

$$\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} > 2G.$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < G.$$

令 $X = \max\{2(X_0 + 1), X_1\}$, 则当 $x > X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{x} > G.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$,

结论误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. 例如, 按下式定义 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2n, & \text{当 } 2n \leq x < 2n+1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 2n+1 \leq x < 2n+2 \text{ 时.} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

则显然 $f(x)$ 满足原题的条件(1)和(2) (这时 $a=0$), 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$; 但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty$ (实

际 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$).

610. 证明, 若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的 (带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 和 $-\infty$) *) 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^2} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广):若(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于域 $x > a$ 内;(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限域 $a < x < b$ 内有界,并且 $g(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时满足 $g(x+1) > g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$);

则必

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

证如下:

先设 l 为有限数. 任给 $\varepsilon > 0$. 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x > X_0 + 1$. 于是, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 使 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ & \quad \cdot \left[\frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right], \end{aligned}$$

$$\text{而 } \left| \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(k=1, 2, \dots, n),$$

又由于

$$\begin{aligned} g(x) &= g(X_0 + \tau + n) > g(X_0 + \tau + n - 1) \\ &> g(X_0 + \tau + n - 2) > \dots > g(X_0 + \tau), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} &> 0 \\ (k=1, 2, \dots, n); \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

容易直接验证等式

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - l &= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right] \\ &\quad + \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故必有正数 $X_1 > a$ 存在, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. l 为有限数时获证.

下设 $l = +\infty$ (若 $l = -\infty$, 则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l = +\infty$ 的情形). 任给 $G > 0$, 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} > 4G.$$

当 $x > X_0 + 1$ 时, 仿前一段之证, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)} &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &\quad \cdot \frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &> 4G \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &= 4G. \end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left[1 - \frac{g(X_0+\tau)}{g(x)} \right] \cdot \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)} \\ &\quad + \frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

根据 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 以及 $f(x), g(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上的有界性, 可取正数 $X_1 > a$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0+\tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0+\tau)}{g(x)} \right| < G.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 4G - G = G.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题, 在一般性定理中取 $g(x) = x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件, 并且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + (n+1)x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(x+1) + \frac{1}{2}(n+1)nx^{-1} + \cdots + (n+1)x^{-n+1} + x^{-n}} \\ &= \frac{l}{n+1}. \end{aligned}$$

由此, 根据此一般性定理, 即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{n+1}.$$

证毕.

*) 原题所说的无穷, 必须是带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 或 $-\infty$; 参看 609 题末尾加的注.

注. 608 题的(a)和 609 题可直接从上述一般性定理推出. 实际上, 只需令 $g(x) = x$, 由

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] \end{aligned}$$

即知.

611. 证明: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

证 (a) 当 $x=0$ 时是显然的; 当 $x \neq 0$ 时, 令 $y_n = \frac{n}{x}$, 由

71 题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n \cdot x} = e^x;$$

(6) 当 $x=0$ 时是显然的, 我们先讨论 $x>0$ 的情形.

由牛顿二项式定理知

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

另一方面, 当 $m>n$ 时有

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots \\ & \quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right), \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$ (n 保持不变), 得

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x>0).$$

由于

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= 1 + (-1)^n \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2,$$

而由 61 题知, 对固定的 x 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. 于是, 对于 $x < 0$, 仍然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x \quad (x < 0).$$

612. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$.

证 由 72 题

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{\theta_k}{k! k},$$

其中 $0 < \theta_k < 1$, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[2\pi n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)! (n+1)} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right]}{2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)} \cdot 2\pi n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

作下列函数的图形:

613. (a) $y = 1 - x^{100}$;

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

解 (a) 如图 1.238 所示. 它关于 y 轴对称.

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < 1; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1. \end{cases}$ 如图 1.239 所

示

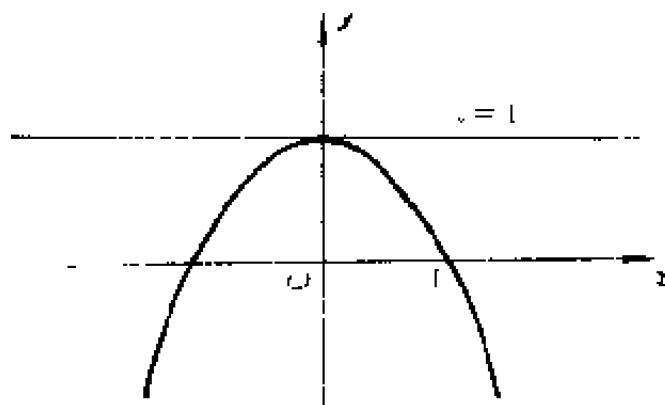


图 1.238

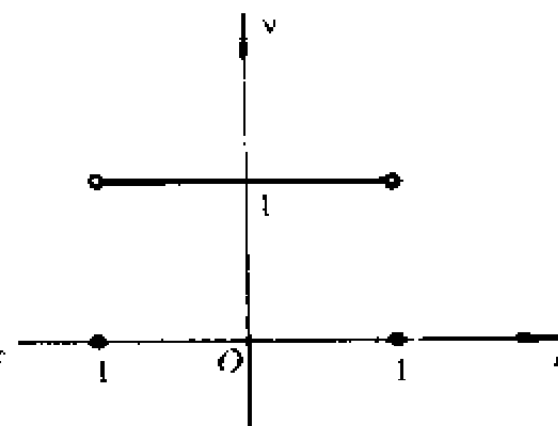


图 1.239

614. (a) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}} \quad (x \geq 0);$

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x \geq 0).$

解 (a) 如图 1.240 所示.

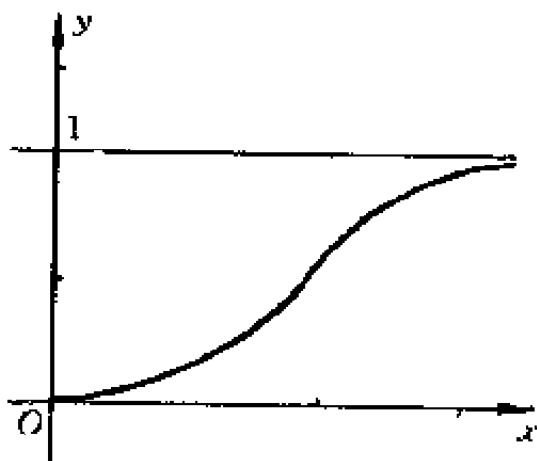


图 1.240

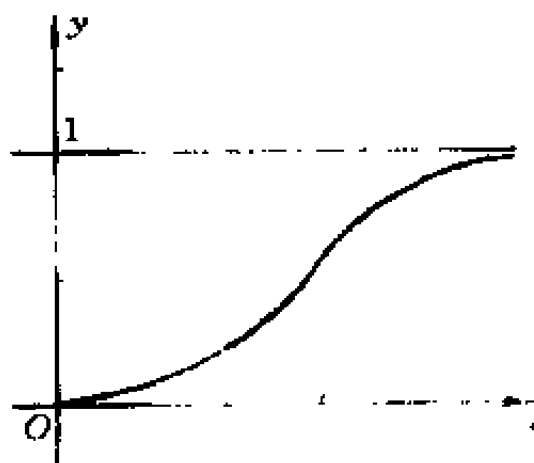


图 1.241

$$(b) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.241 所示.

$$615. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$$

解 因为 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$, 所以,

$$y = \begin{cases} -1, & \text{若 } |x| < 1, x \neq 0; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1; \\ 1, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.242 所示.

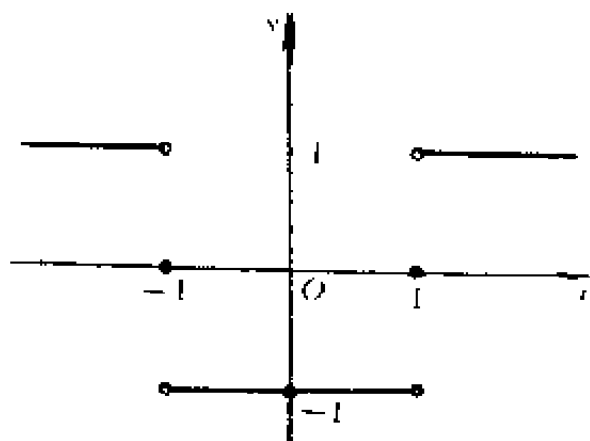


图 1.242

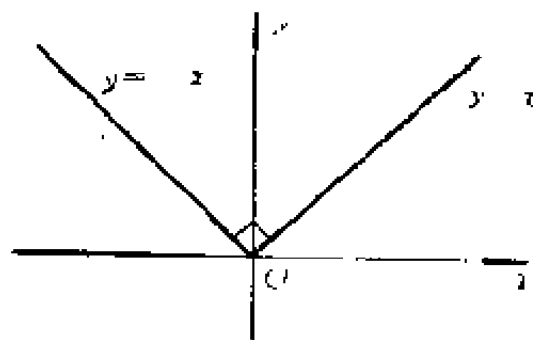


图 1.243

$$616. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

解 $y = \sqrt{x^2} = |x|$.

如图 1.243 所示.

$$617. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geqslant 0).$$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如图 1.244 所示.

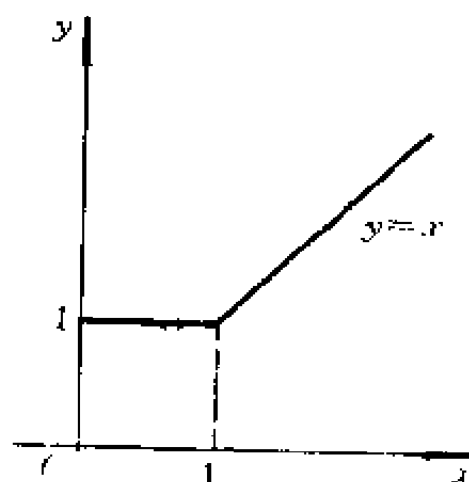


图 1.244

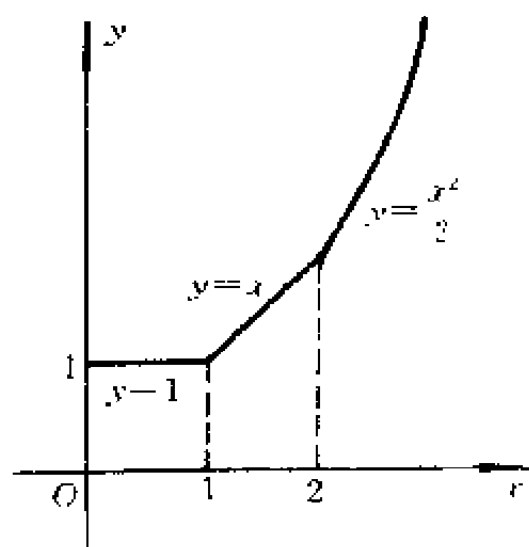


图 1.245

618. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ \frac{x^2}{2}, & \text{若 } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$

如图 1.245 所示.

619. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$
($x \geq 0$).

解

$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 2; \\ 2\sqrt{2}, & \text{若 } x = 2; \\ x^2, & \text{若 } x > 2. \end{cases}$

如图 1.246 所示.

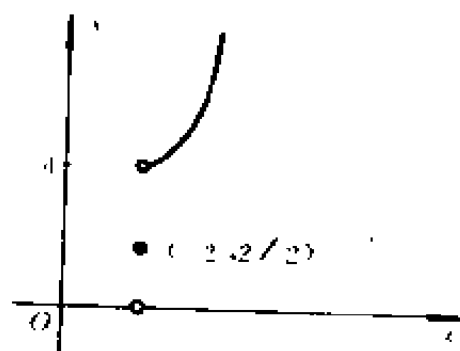


图 1.246

620. (a) $y = \sin^{1000} x$;

$$(6) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

解 (a) 如图 1.247 所示. 其图形始终在 Ox 轴上方.

$$(6) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{若 } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

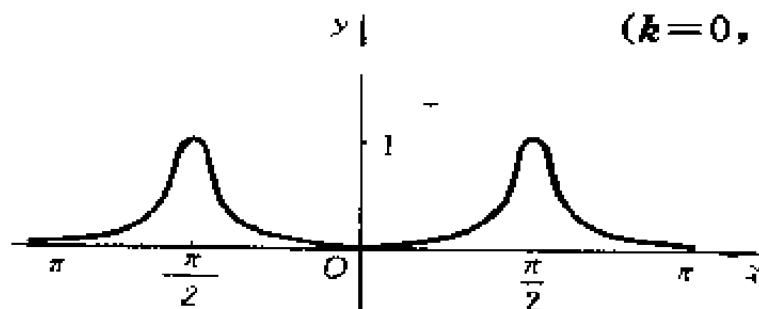


图 1.247

如图 1.248 所示



图 1.248

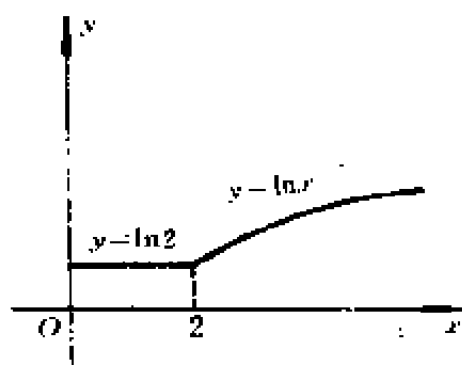


图 1.249

$$621. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \ln 2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ \ln x, & \text{若 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.249 所示.

$$622. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n.$$

解 $y = \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如图 1.250 所示.

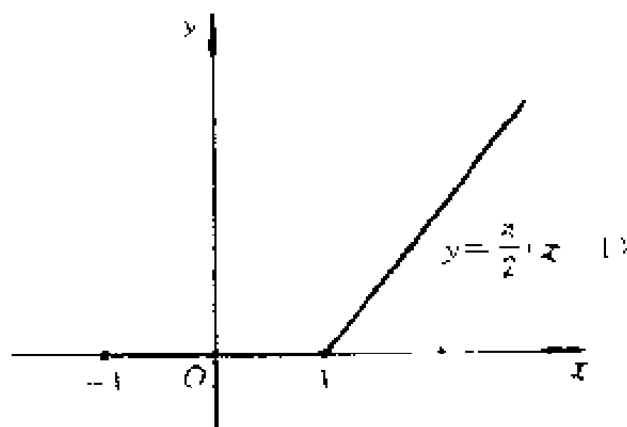


图 1.250

$$623. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \leq -1; \\ e^{x+1}, & \text{若 } x > -1. \end{cases}$$

如图 1.251 所示.

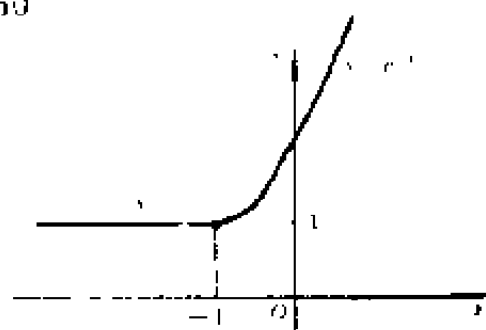


图 1.251

$$624. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}.$$

解

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 0; \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

如图 1.252 所示.

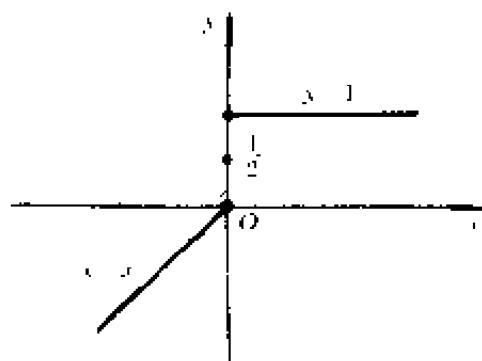


图 1.252

$$625. y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x}$$

($x > 0$).

解

$$y = \lim_{t \rightarrow t} \frac{\ln\left(1 + \frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}} \\ = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

如图 1.253 所示.

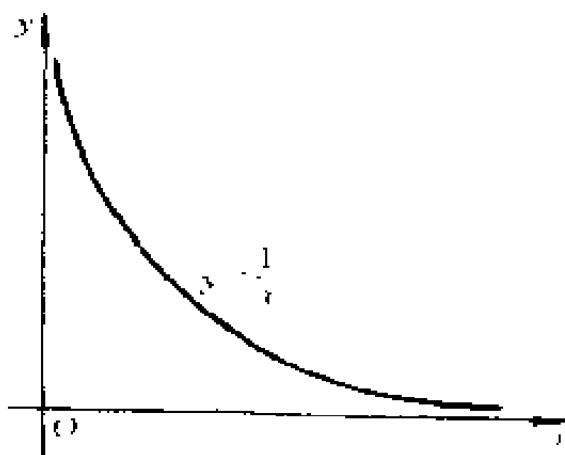


图 1.253

626. 若有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线 $y = kx + b$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的(斜)渐近线. 利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0. \quad (1)$$

而在 $x > 0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (2)$$

又由(1)式得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b, \quad (3)$$

即常数 k, b 可由(2)、(3)式确定. 反之, 若极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 且为有限数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在且有限, 等于 b , 则(1)式成立, 即

$$y = kx + b$$

是一条渐近线。用完全类似的方法可以讨论 $x \rightarrow -\infty$ 的情形。

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形：

(a) $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$; (б) $y = \sqrt{x^2 + x}$;

(в) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^3}$; (г) $y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$;

(д) $y = \ln(1 + e^x)$; (е) $y = x + \arccos \frac{1}{x}$;

(ж) $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$, 所以, 直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次, 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 + x - 2)} = 0,$$

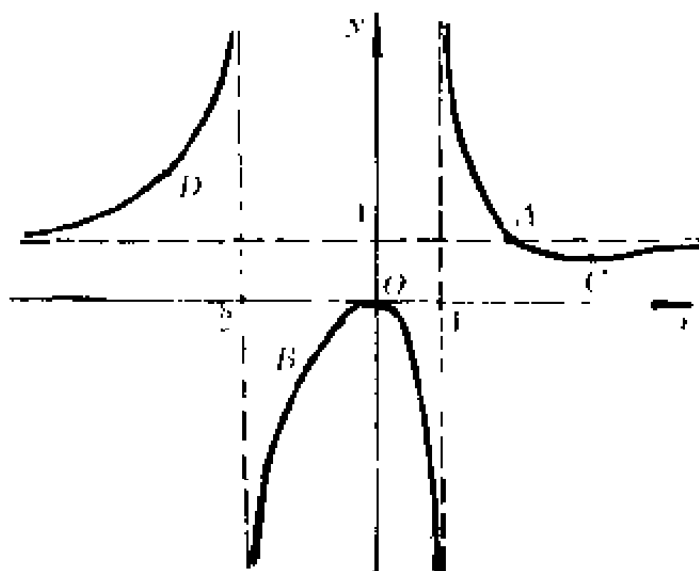


图 1.254

而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1,$$

所以, $y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2 < x < 1$ 时, $y < 0$, 故曲线在 Ox 轴的下方;

当 $x > 1$ 或 $x < -2$ 时, $y > 0$, 故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点;

$A(2, 1), B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C\left(4, \frac{8}{9}\right), D\left(-3, \frac{9}{4}\right), \dots$,
并用光滑曲线联接, 即得图形(图 1.254).

$$(6) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2},$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = -\frac{1}{2},$$

于是, 直线 $y = x + \frac{1}{2}$ 及 $y = -x - \frac{1}{2}$ 为曲线的(斜)渐近线.

曲线 $y = \sqrt{x^2+x}$ 为双曲线

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

在 Ox 轴上方的部分.

如图 1.255 所示.

$$(6) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} - 1 = -1,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} - x \sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

斜渐近线为

$$y = x + \frac{1}{3}.$$

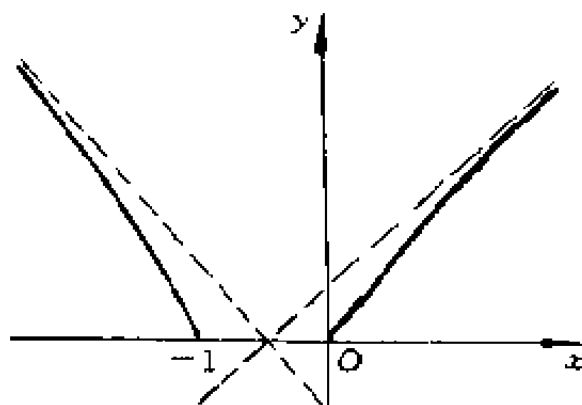


图 1.255

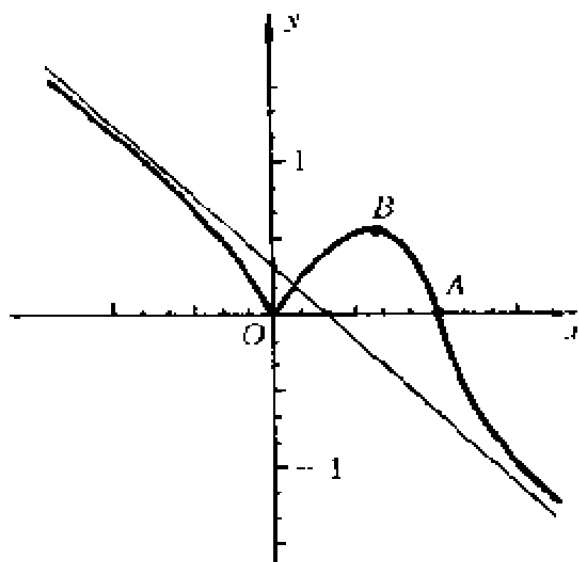


图 1.256

曲线通过原点及点 $A(1,0)$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y > 0$; 而当 $x > 1$ 时, $y < 0$.

如图 1.256 所示.

(r) 当 $x > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0,$$

故渐近线为

$$y=x;$$

当 $x < 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0,$$

故另一渐近线为

$$y=0.$$

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是“可去的间断”).

因为 $y > 0$, 故图形始终在 Ox 轴的上方.

如图 1.257 所示.

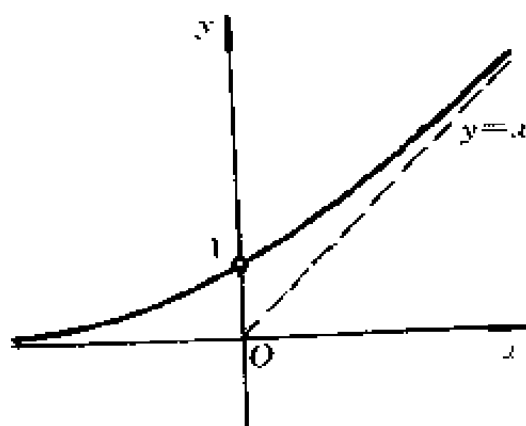


图 1.257

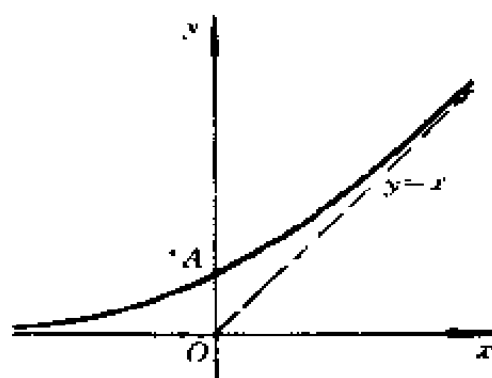


图 1.258

(д) 当 $x > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + \ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0,$$

故渐近线为

$$y=x$$

同法可求, 当 $x < 0$ 时的渐近线为

$$y = 0.$$

曲线通过点 $A(0, \ln 2)$.

如图 1.258 所示.

$$(e) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arccos \frac{1}{x}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x + \arccos \frac{1}{x}) - x] = \frac{\pi}{2},$$

故渐近线为

$$y = x + \frac{\pi}{2}.$$

将函数 $y = x$ 及 $y = \arccos \frac{1}{x}$ (见 316 题) 的图形按相加法即得, 如图 1.259 所示.

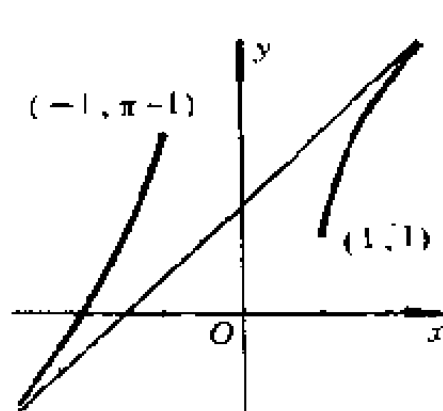


图 1.259

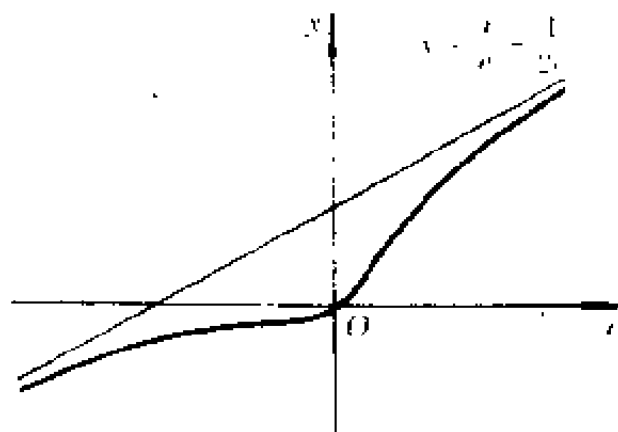


图 1.260

$$(x) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \frac{1}{2e},$$

故渐近线为

$$y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}.$$

曲线通过原点.

如图 1.260 所示.

求下列极限:

$$628. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

解 由于

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$;

$$\begin{aligned} \text{当 } |x| \neq 1 \text{ 时, 此式为 } &\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \\ = &\frac{1}{1 - |x|} \cdot \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{(|x|^2)^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

由 61 题的结果知: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \frac{(|x|^2)^n}{n!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

故当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \rightarrow 0$.

于是, 对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = 0.$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})], \text{ 若 } |x| < 1.$$

解 因为

$$\begin{aligned} 1+x &= \frac{1-x^2}{1-x}, \\ 1+x^2 &= \frac{1-x^4}{1-x^2}, \end{aligned}$$

.....

$$1 + x^{2^n} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

又因 $|x| < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^{2^{n+1}} \rightarrow 0$.

最后, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^n})] = \frac{1}{1 - x}.$$

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$

解 因为

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} \\ &= \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin x}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{\sin x}{x} (x \neq 0). \end{aligned}$$

631. 令 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$

其中 $\psi(x) > 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_m = 0 (m = 1, 2, \cdots, n)$, 换言之, 当 $m = 1, 2, \cdots, n$ 且 $n > N(\epsilon)$ 时 $|\alpha_m| < \epsilon$. 再假定

$$a_{mn} \neq 0. ^{*)}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(a_{1n}) + \varphi(a_{2n}) + \cdots \varphi(a_{nn})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(a_{1n}) + \psi(a_{2n}) + \cdots + \psi(a_{nn})], \end{aligned} \quad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \epsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x) > 0$),

$$(1 - \epsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1 + \epsilon)\psi(x). \quad (2)$$

由 $a_{mn} \neq 0$ 以及 $a_{mn} \rightarrow 0 (m = 1, 2, \cdots, n)$ 知, 必有正整数 $N = N(\epsilon)$ 存在, 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$0 < |a_{mn}| < \delta \quad (m = 1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)\psi(a_{mn}) &< \varphi(a_{mn}) < (1 + \epsilon)\psi(a_{mn}) \\ (n > N, m = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

将这 n 个不等式相加, 得

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) &< \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}) < (1 + \epsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) \\ (n > N). \end{aligned}$$

即

$$1 - \epsilon < \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} < 1 + \epsilon \quad (n > N).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} = 1.$$

由假定, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})$ 存在, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}) &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} \right] \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}). \end{aligned}$$

证毕.

*) 编者注: 此题应加上条件 $a_{mn} \neq 0$ (原书没有), 因为 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 都可能在 $x = 0$ 处无定义. 另外, $m = 1, 2, \dots, n$.

利用上边的定理, 求

$$632. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right].$$

解 设 $x = \frac{k}{n^2}$, 我们将首先说明它满足 631 题的条件.

首先,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

其次, $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty; k = 1, 2, \dots, n$).

最后,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right] = \frac{1}{6}.$$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right).$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 而且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{ka}{n^2} \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

$$\text{又因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2},$$

故利用 631 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right) = \frac{a}{2}.$$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) \quad (a > 0).$

解 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \right) = 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$.

$\ln a \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a$;

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{2} \ln a.$$

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, $\ln y = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

我们考虑下列极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

又 $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $k = 1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \frac{1}{2},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$, 当 n 充分大时, $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} > 0$, 此时,

$$\begin{aligned} \ln y &= \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{ka}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{x^2} = 1$, 又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $k = 1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3} = \frac{a^2}{3},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = -\frac{a^2}{6},$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots (a > 0).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先, 我们注意到此叙列显然是单调上升的. 其次,

$$\text{由 } x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \text{ 得 } x_n^2 = a + x_{n-1},$$

即

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}. \quad (1)$$

因为 $0 < x_{n-1} < x_n$, 即在(1)式右端第二项小于1, 所以,

$$x_n < \frac{a}{x_n} + 1. \quad (2)$$

$$\text{又显然有 } x_n > \sqrt{a} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式右端, 即得

$$x_n < \sqrt{a} + 1,$$

故叙列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据极限存在的准则可知, 叙列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设其值为 l .

利用等式 $x_n^2 = a + x_{n-1}$, 两端取极限, 得

$$l^2 = a + l,$$

解之,得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合(因为 $x_n > 0$),只取其正根,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

638. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用以下的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 当 $x = 0$ 时, $y_n = 0, n = 1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

当 $0 < x \leq 1$ 时,用归纳法可证 $y_n > 0, n = 1, 2, \dots$;

$y_1 > 0$. 若 $y_k > 0$, 由 $x > y_{k-1}^2$, 可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geq \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0,$$

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0,$$

.....

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{即 } \frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \cdots > 0,$$

$$0 < y_2 < y_4 < \cdots < \frac{x}{2}.$$

可见数列 y_1, y_3, \cdots 及数列 y_2, y_4, \cdots 都是收敛的. 设极限分别为 A_1, A_2 , 由

$$y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$$

$$\text{及 } y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2 = \frac{x}{2} + \frac{A_1^2}{2}, A_1 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}$, 相减得

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2) \frac{(A_1 + A_2)}{2}.$$

而 $0 \leq A_1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}, 0 \leq A_2 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$, 故

$$A_1 = A_2 = A.$$

用极限定义直接可以证明, 若 $\{y_n\}$ 的两个子数列 $\{y_{2n}\}$ 及 $\{y_{2n-1}\} (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛于同一个极限, 则 $\{y_n\}$ 也收敛于这个极限, 由

$$A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$$

解得

$$A = \sqrt{1+x} - 1,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1.$$

639. 函数数列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 显然, $y_2 \geq y_1$. 假设 $y_n \geq y_{n-1}$, 则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

便可推出 $y_{n+1} \geq y_n$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 单调上升.

现在我们证明这个数列有界. 显然

$$0 \leq y_1 < 1.$$

设 $0 \leq y_k < 1$, 则 $0 \leq y_k^2 < 1$, 且 $0 \leq y_{k+1} < 1$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 有界.

这样, 我们就证明了此数列的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在. 设其值为 l (显然 $0 \leq l \leq 1$), 即得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$$

解之, 得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. 由于 $0 \leq l \leq 1$, 故必

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

640. 为了求克卜勒方程式 (\forall уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \dots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1},$$

... (逐次逼近法).

证明有 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 且数 ξ 为方程式 (1) 的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_n - x_{n-1}|$. 由于

$$x_2 - x_1 = \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_0) = 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}|x_2 - x_1| &\leq 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2} \\ &= \varepsilon |x_1 - x_0|.\end{aligned}$$

同理可证

$$|x_3 - x_2| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|.$$

设

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|,$$

则有

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right| \\ &\leq \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|.\end{aligned}$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n , 均有 $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|$. 于是, 当 $m > n$ 时, 有

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots \\ &\quad + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \cdots + \varepsilon^n) |x_1 - x_0| \\ &= \varepsilon^n \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} \cdot |x_1 - x_0|,\end{aligned}$$

而

$$|x_1 - x_0| = \varepsilon |\sin x_0| \leq \varepsilon,$$

所以,

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.$$

由此知

$$|x_m - x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

按哥西判别法得知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

存在. 设其值为 ξ , 由等式

$$x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$$

取极限即得

$$\xi = m + \varepsilon \sin \xi.$$

这就是说, 变量 x_n 的极限 ξ 是方程(1) 的根.

最后, 证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根, 则

$$\xi_1 - \xi = \varepsilon(\sin \xi_1 - \sin \xi),$$

由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leq \varepsilon |\xi_1 - \xi|.$$

因为 $0 < \varepsilon < 1$, 故 $\xi_1 = \xi$.

于是, 我们就证明了 ξ 是方程(1) 的唯一的根.

641. 若 $\omega_k(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq k$ ($k > 0$) 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_k(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的振幅;

$$(a) f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(v) f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right); \quad (r) f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (e) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(ж) f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

解 (a) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$

$$(b) \omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty;$$

$$(v) \omega_k(f) = 3k - k = 2k, \omega_0(f) = 0;$$

$$(\Gamma)\omega_k(f) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{(-k)} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{k},$$

$$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$(\Delta)\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$$

$$(\Theta)\omega_k(f) = \left| \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}} \right|, \omega_0(f) = 1;$$

$$(\mathcal{K})\omega_k(f) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \omega_0(f) = e - e^{-1} = 2\operatorname{sh}1.$$

642. 命

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

证明: 对于满足条件 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 的任何数 α , 可以选出数列 $x_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

证 对于确定的 $\alpha: |\alpha| \leq 1$, 总存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 使

$$\sin x_0 = \alpha.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

又因 $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \alpha$,

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

643. 设: (a) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

$$(6) f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x};$$

$$(B) f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\cos^2 \frac{1}{x}}.$$

求

$$l = \varliminf_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 和 } L = \varlimsup_{x \rightarrow 0} f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

$$(a) l = -1, \quad L = 2;$$

$$(6) l = -2, \quad L = 2;$$

$$(B) l = 2, \quad L = e.$$

644. 设:

$$(a) f(x) = \sin x; \quad (6) f(x) = x^2 \cos^2 x;$$

$$(B) f(x) = 2^{\sin^2 x};$$

$$(r) f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} \quad (x \geqslant 0).$$

求

$$l = \varliminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ 和 } L = \varlimsup_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

$$(a) l = -1, \quad L = 1;$$

$$(6) l = 0, \quad L = +\infty;$$

$$(B) l = \frac{1}{2}, \quad L = 2;$$

$$(r) l = 0, \quad L = +\infty.$$

§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此, 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2° 符号

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

表示当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小, 或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当 $x \rightarrow a$ 时, 无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶(在广义的意义上)不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶(或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶), 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为等价的 [$\varphi(x) \sim \psi(x)$].

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

一般地说来, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时, 已知函数可用其等价的函数来代换.

645.

把圆心角 $AOB = x$ (图

1.261) 当作 1 阶无穷小, 求

下列各量无穷小的阶:

(a) 弦 AB ;

(b) 矢 CD ;

(c) 扇形 AOB 的面积;

(d) 三角形 ABC 的面积;

(e) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(f) 弓形 ABC 的面积.

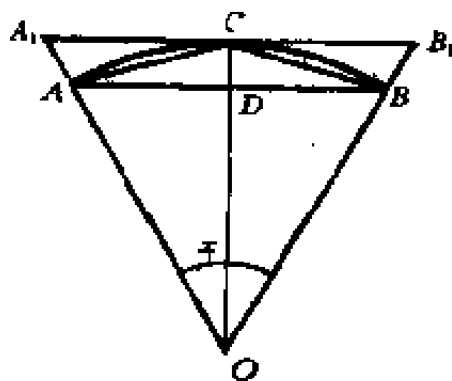


图 1.261

解 (a) $AB = 2R \sin \frac{x}{2}$, 式中 R 为圆的半径.

因为 $\frac{AB}{x} = \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{x} \rightarrow R (x \rightarrow 0)$, 故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(b) CD = R - R \cos \frac{x}{2} = 2R \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{CD}{x^2} \rightarrow \frac{R}{8}$, 所以, 矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(B) 扇形 AOB 的面积 $S = \frac{1}{2}R^2x$.

因为 $\frac{S}{x} = \frac{1}{2}R^2$, 所以, S 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(\Gamma) \Delta ABC = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = 2R^2 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{\Delta ABC}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{16}$, 所以, ΔABC 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

$$(\Delta) A_1C = R \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

于是, 梯形 ABB_1A_1 的面积

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin^2 \frac{x}{2} \left(2R \sin \frac{x}{2} + 2R \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \\ &= 2R^2 \sin^3 \frac{x}{2} + 2R^2 \sin^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{A_0}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$, 所以, 面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(e) 弓形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{x}{2} \cdot R \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{R^2}{2}(x - \sin x). \end{aligned}$$

由于 $x - \sin x$ 是奇函数, 故只需考虑 $x \rightarrow +0$ 时的情形.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\leq \operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) \\ &= \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = O^*(x^3), \end{aligned}$$

而由 $x \geq 2\sin \frac{x}{2}$, 又有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\geq 2\sin \frac{x}{2} - \sin x = 2\sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \\ &= 4\sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = O^*(x^3). \end{aligned}$$

于是, 当 x 大于 0 而充分小时, 存在两常数 $A > 0, B > 0$, 使

$$Ax^3 \leq x - \sin x \leq Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小. 实际上, 尔后将会看到, 有 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ (但要用到导数的概念).

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数, 且 $O(f(x))$ 为 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶 (在广义的意义上) 的任意无穷大函数, 其中 $f(x) > 0$.

证明: (a) $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$;

$$(b) O\{o[f(x)]\} = o[f(x)];$$

$$(c) o\{O[f(x)]\} = o[f(x)];$$

$$(d) O\{O[f(x)]\} = O[f(x)];$$

$$(e) O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)];$$

$$(f) O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

证 (a) 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)\}} \cdot \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0,$$

故 $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$.

(b) 由 133 题 (6) 的结果, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)\}} \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此

$$O\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(B) 仍由 133 题(6) 的结果, 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \right| \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0$, 即

$$o\{O[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(r) 由 132 题(6) 的结果, 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$.

(u) 由 131 题(6), 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \\ &+ \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$.

(e) 由 132 题(6), 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[g(x)]|}{g(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O[f(x)]O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

647. 设 $x \rightarrow +0$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$ (C 为常数);

(6) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);

(B) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 由

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|CO(x^n)|}{x^n} = |C| \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故

$$CO(x^n) = O(x^n),$$

(6) 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} &\leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &+ \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m).$$

(B) 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}} &\leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^m)|}{x^m} < +\infty, \end{aligned}$$

得知

$$O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$;

(6) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$).

(B) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 与 (B) 同 647 题 (a) 与 (B) 之证 (只要将 $x \rightarrow +0$ 换为 $x \rightarrow +\infty$). 下证 (6); 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} \\ & \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|O(x^n)|}{x^n} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m).$$

649. 证明符号 \sim 具有下列性质: (1) 反射性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; (2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$; (3) 传递性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 及 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 则 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

证 (1) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} \equiv 1 \rightarrow 1$, 所以, $\varphi(x) \sim \varphi(x)$.

(2) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, 所以, $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$.

即: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$.

(3) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, $\frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1$, 所以,

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1,$$

即: $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. 设 $x \rightarrow +0$. 证明下列等式:

(a) $2x - x^2 = O^*(x)$; (б) $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$;

(в) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; (г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right)$ ($\epsilon > 0$);

(д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[4]{x}$;

(е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$; (ж) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

证 由题设 $x \rightarrow +0$, 于是

(a) 因为 $\frac{2x - x^2}{x} \rightarrow 2$, 所以, $2x - x^2 = O^*(x)$.

(б) 因为 $\frac{x \sin \sqrt{x}}{x \sqrt{x}} \rightarrow 1$, 所以, $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(B) 因为 $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| (x \neq 0)$, 所以,

$$x \sin \frac{1}{x} = O(|x|).$$

(Г) 因为 $\frac{\ln x}{\frac{1}{x^4}} = x^4 \ln x \rightarrow 0$, 所以, $\ln x = o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

(Д) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1,$$

故 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}}$.

(e) 因为 $\left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} (x \neq 0)$, 所以, $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$.

(ж) 因为 $\frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \frac{1}{2}n(n-1)x + \dots \rightarrow 0$,

所以 $(1+x)^n - 1 - nx = o(x)$, 即

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. 设 $x \rightarrow +\infty$. 证明下列等式:

(a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3)$;

(б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right)$;

$$(B) x + x^2 \sin x = O(x^2);$$

$$(r) \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(d) \ln x = o(x^\epsilon) \quad (\epsilon > 0);$$

$$(e) x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(K) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x};$$

$$(3) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2;$$

证 由题设 $x \rightarrow +\infty$, 于是

$$(a) \text{ 因为 } \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} \rightarrow 2, \text{ 所以}$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^2).$$

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{x^2+1} \rightarrow 1, \text{ 所以,}$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(B) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x + x^2 \sin x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} + \sin x \right|$$

$$= 1 < +\infty, \text{ 所以, } x + x^2 \sin x = O(x^2).$$

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ 所以,}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(d) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x^\epsilon} \rightarrow 0, \text{ 所以,}$$

$$\ln x = o(x^\epsilon).$$

(e) 因为 $\frac{x^p e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{p+2}}{e^x} \rightarrow 0$, 所以,

$$x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(ж) 因为 $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \rightarrow 1, \text{ 所以, } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}.$$

(з) 因为 $\frac{x^2 + x \ln^{100} x}{x^2} = 1 + \frac{\ln^{100} x}{x} \rightarrow 1$, 所以

$$x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

652. 证明当 x 充分大时, 下边的不等式成立:

(a) $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$;

(б) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; (в) $x^{10} e^x < e^{2x}$.

证 (a) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} \rightarrow 0$,

所以, 当 x 充分大以后, 有 $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} < 1$, 即

$$x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3.$$

(б) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, 所以, 当 x 充分

大以后, 有 $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} < 1$, 即

$$\ln^{1000} x < \sqrt{x}.$$

(в) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{10}}{e^x} \rightarrow 0$, 所以, 当 x

充分大后,有 $\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}} < 1$, 即

$$x^{10}e^x < e^{2x}.$$

653. 设 $x \rightarrow 0$, 选出下列函数的形如 Cx^n (C 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变数 x 的阶:

(a) $2x - 3x^3 + x^5$; (b) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

(c) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; (r) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$, 即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \text{ 或 } f(x) = g(x) + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

(a) 因为 $\frac{2x - 3x^3 + x^5}{2x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$

故其主部为 $2x$, 它对于无穷小 x 是一阶的.

(b) 因为 $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$$

故其主部为 x , 它对于 x 是一阶的.

(c) 因为 $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{3x^2 - 8x^3}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{3x^2 - 8x^3}{2}} = \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{3x^2 - 8x^3}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^{16}} + \sqrt[3]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2} + \dots + \sqrt[3]{(1-3x)^{10}}}{\sqrt[3]{(1-2x)^{16}} + \sqrt[3]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2} + \dots + \sqrt[3]{(1-3x)^{10}}},$$

于是, $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$, 故其主部为

$$\frac{x^2}{2}, \text{ 它对于 } x \text{ 是二阶的.}$$

(r) 因为 $\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{2}{\cos x} \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$, 于是,

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0), \text{ 故其主部为 } \frac{x^3}{2}, \text{ 它对于 } x \text{ 是三阶}$$

的.

654. 设 $x \rightarrow +0$, 证明无穷小

$$(a) f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad (b) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

无论对任何的 n , 也不能与无穷小 $x^n (n > 0)$ 相比较.

即: 对于如此的 n , 不能有等式 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$, 式中 k 为异于零的有限量.

证 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0^{*}) (n > 0)$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow +0$).

(b) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0^{**}) (n > 0)$, 所以, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow 0$).

*) 参看 592 题.

**) 参看 591 题.

655. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶:

$$(a) x^3 - 3x + 2; \quad (b) \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}; \quad (v) \ln x;$$

$$(r) e^x - e; \quad (d) x^n - 1.$$

解 (a) 因为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, 又

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$, 对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小

$$(6) \text{ 因为 } \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = - \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}, \text{ 又}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$, 对于 $(x-1)$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

$$(B) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln[1 + (x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(r) \text{ 因为 } e^x - e = e(e^{x-1} - 1), \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1).$$

故其主部为 $e(x-1)$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(D) \text{ 因 } x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1, \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x \ln x} - 1}{x-1} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \frac{x \ln[1 + (x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

656. 设 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷大 x 的阶:

$$(a) x^2 + 100x + 10000; (6) \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(B) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}; (r) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

解 (a) 因为 $x^2 + 100x + 10000 \sim x^2 (x \rightarrow +\infty)$, 故主部为 x^2 , 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} = \frac{2x^5}{2x^3 - 6x^3 + 2x^2},$$

$$\rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty)$$

故主部 $2x^3$, 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(B) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} \left[\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right],$$

于是,

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $x^{\frac{2}{3}}$, 它对于无穷大 x 是 $\frac{2}{3}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\sqrt[3]{x}$, 它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{3}$ 阶的.

657. 设 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶:

$$(a) \frac{x+1}{x^4+1}; \quad (b) \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(B) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}; \quad (r) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\text{解} \quad (a) \text{ 因为 } \frac{x+1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{x^4(x+1)}{x^4} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 3 阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

$$(8) \frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\frac{2\sqrt{x(x+2)} - 2(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}}} \\ = \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)} + x + 1)}$$

于是, 由此得

$$\frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{8}{\left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right] \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x} \right]} \\ \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x} \right)^2$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 为 2 阶的.

658. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C \left(\frac{1}{x-1} \right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

$$(a) \frac{x^2}{x^2-1}; (6) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; (B) \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$(r) \frac{1}{\sin \pi x}; (n) \frac{\ln x}{(1-x)^2};$$

解 (a) $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$, 于是,

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{1}{2(x-1)}} = \frac{2x^2}{x+1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{2(x-1)}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} \\ \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\sqrt{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{1-x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

(B) 因为 $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}$, 于是,

$$\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{1-x}}} \rightarrow (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}} = \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(1-x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-x} \right)$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(n) \text{ 因为 } \frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{x-1}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

659. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = x^n (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加较快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \rightarrow +\infty$, 所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为 $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty, n \text{ 为任一固定的自然数})$, 所以 e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

660. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = \sqrt[n]{x} (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x^{-\frac{1}{n(n-1)}}$
 $\rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$

所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为 $\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$

所以, $\ln x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个增加得较慢.

*) 利用 565 题的结果.

661. 证明对于任意的函数叙列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots (x_0 < x < +\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N > x_0$. 定义 $x_0 < x < +\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} n \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| + 1 \right), & \text{当 } n \leq x < n+1 \text{ 时,} \\ & (n = N, N+1, \dots); \\ 0, & \text{当 } x_0 < x < N \text{ 时.} \end{cases}$$

于是, 对任何正整数 n , 当 $x > \max\{N, n\}$ 时, 有

$$\left| \frac{f_n(x)}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x)|}{[x] \left(\sum_{k=1}^{[x]} |f_k(x)| + 1 \right)} < \frac{1}{[x]},$$

其中 $[x]$ 表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 比 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

§ 7. 函数的连续性

1° 函数的连续性 设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即, 若对于每一个 $\epsilon > 0$, 都有 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义的一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

都成立, 则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时 (或在点 x_0) 是连续的.

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是连续的, 则称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$ (区间, 线段等等) 上是连续的.

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式(1)不成立 (即, (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或 (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或 (c) 公式(1)的两端虽有意义, 但它们不相等), 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点.

分为: (1) 第一类的不连续点 x_0 , 对于这些点存在有单侧有限的极限:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ 和 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

(2) 第二类的不连续点 —— 其余的一切不连续点.

差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立, 则不连续点 x_0 称为无变化的. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞ , 则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \text{ [或 } f(x_0 + 0) = f(x_0)]$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左侧 (或右侧) 连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2° 初等函数的连续性 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则函数

$$(a) f(x) \pm g(x); \quad (b) f(x)g(x);$$

$$(B) \frac{f(x)}{g(x)} [g(x_0) \neq 0]$$

也在 $x = x_0$ 连续.

特殊情形: (a) 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的; (b) 有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值, 都是连续的.

一般地说, 基本初等函数 $x^n, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, a^x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \cdots$ 在一切使它们有意义的点都连续.

较普遍的结果如下: 若函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 及函数 $g(y)$ 当 $y = f(x_0)$ 时连续, 则函数 $g(f(x))$ 当 $x = x_0$ 时连续.

3° 关于连续函数的基本定理 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则: (1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的; (2) 达到其下确界 m 和上确界 M (外尔什特拉斯定理); (3) 在每一个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 中, 函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的一切中介值 (哥西定理). 特例, 若 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, 则可找到一个数值 $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$, 使得 $f(\gamma) = 0$.

662. 已给连续函数 $y = f(x)$ 的图形. 对于给定点 a 与 给定数 $\epsilon > 0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$, 使当 $|x - a|$

$< \delta$ 时, $|f(x) - f(a)|$
 $< \epsilon$.

解 如图 1.262

所示, 如果 $\delta_1 < \delta_2$,

我们只要取

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

即有

$$\delta = \delta_1.$$

于是, 当 $|x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

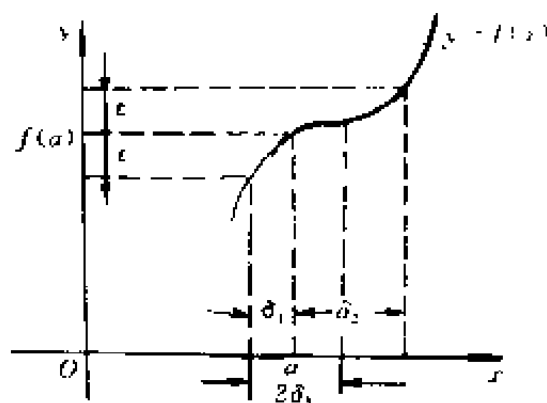


图 1.262

663. 要做一个金属的边长 $x_0 =$

10 厘米的正方形薄片. 若要其面积 $y = x^2$ 与预计的 $y_0 = 100$ 平方厘米的差不超过 (a) ± 1 平方厘米; (b) ± 0.1 平方厘米; (c) ± 0.01 平方厘米; (r) $\pm \epsilon$ 平方厘米, 问其边 x 可以在什么范围内变更?

解 (a) 要 $|x^2 - 100| < 1$, 只要

$$99 < x^2 < 101.$$

解之, 得

$$9.95 < x < 10.05.$$

(b) 要 $|x^2 - 100| < 0.1$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.1} < x < \sqrt{100 + 0.1}.$$

解之, 得

$$9.995 < x < 10.005.$$

(c) 要 $|x^2 - 100| < 0.01$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.01} < x < \sqrt{100 + 0.01}.$$

解之, 得

$$9.9995 < x < 10.0005.$$

(r) 要 $|x^2 - 100| < \epsilon$, 只要

$$\sqrt{100 - \epsilon} < x < \sqrt{100 + \epsilon}. *$$

*) 本来, x 处应记成 $|x|$, 在此仅考虑点 $x = 10$ 处, 故在其近傍 x 值恒为正, 因此, 不必取绝对值了。

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之间, 为了使计算这立方体的体积时发生的绝对误差不超过 ϵ 立方米, 设 (a) $\epsilon = 0.1$ 立方米; (b) $\epsilon = 0.01$ 立方米; (B) $\epsilon = 0.001$ 立方米, 问测量此立方体的边 x 时可允许有怎样的绝对误差 Δ ?

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \epsilon$, 只要

$$|x_1 - x_2|(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \epsilon,$$

即只要

$$|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{3 \times 3^2} = \frac{\epsilon}{27},$$

故有

$$(a) \Delta < \frac{0.1}{27} (\text{米}) = 3.7 (\text{毫米});$$

$$(b) \Delta < \frac{0.01}{27} (\text{米}) = 0.37 (\text{毫米});$$

$$(B) \Delta < \frac{0.001}{27} (\text{米}) = 0.037 (\text{毫米}).$$

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域内, 函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\epsilon = 10^{-n} (n \geq 0)$? 求当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时这个邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$, 只要

$$10[1 - 10^{-(n+1)}] < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2,$$

故得

(a) 当 $n = 0$ 时, $81 < x < 121$;

(b) 当 $n = 1$ 时, $98.01 < x < 102.01$;

(c) 当 $n = 2$ 时, $98.8001 < x < 100.2001$;

(d) 当 $n = 3$ 时, $99.980001 < x < 100.020001$.

666. 利用《 $\epsilon - \delta$ 》论证法, 证明函数 $f(x) = x^2$ 当 $x = 5$ 时连续.

填下表:

ϵ	1	0.1	0.01	0.001	...
δ					

证 任给 $\epsilon > 0$,

要 $|x^2 - 25| < \epsilon$, 即 $|x - 5||x + 5| < \epsilon$, (1)

不妨只就 $x = 5$ 的某一邻域来考虑. 例如, 取

$$|x - 5| < 1 \text{ 或 } 4 < x < 6,$$

从而有

$$0 < x + 5 < 11.$$

于是, 只要

$$|x - 5| < \frac{\epsilon}{11}.$$

取 $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{11}, 1\right)$, 则当 $|x - 5| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - 25| < \epsilon,$$

所以, 函数 $y = x^2$ 在 $x = 5$ 处连续.

填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	...
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$...

667. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon = 0.001$. 对于数值 $x_0 = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ 求出充分大的正数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ 使得可从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

可否对于已知的 $\varepsilon = 0.001$ 选出 $\delta > 0$ 来, 使它对于区间 $(0, 1)$ 中的一切 x_0 值都适用, 换句话说, 对于任意的值 $x_0 \in (0, 1)$, 若 $|x - x_0| < \delta$, 则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

解 $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}. \quad (1)$

由于 $|x_0| - |x| \leq |x - x_0|$ 或 $|x| \geq |x_0| - |x - x_0|$, 故有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|}$$

(在此, 我们已假设了 $|x - x_0| \leq |x_0|$, 这一点是可以办到的).

于是要求 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|} < \varepsilon,$$

即只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|} > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

我们取近似值, $\delta = 0.001x_0^2$ ($\varepsilon = 0.001$).

当 $x_0 = 0.1$ 时, $\delta = 10^{-5}$;

当 $x_0 = 0.01$ 时, $\delta = 10^{-7}$;

当 $x_0 = 0.001$ 时, $\delta = 10^{-9}$.

由表达式(1)可知,对于不论怎样小的正数 δ (固定),则当 $|x - x_0| < \delta$ 及 $x_0 \rightarrow 0$ 时, $|f(x) - f(x_0)|$ 可任意地大.因此,无法选出一个公共的正数 δ 来.

668. 简明的用《 $\varepsilon - \delta$ 》的说法在肯定的意义上来表达下面的论断:函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,而在这一点不连续.

解 存在一个 $\varepsilon_0 > 0$,对于无论怎样小的 $\delta > 0$,都有某 x 满足 $|x - x_0| < \delta$,但

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

669. 设对于某些数 $\varepsilon > 0$,可找到对应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$,使得,只要 $|x - x_0| < \delta$,则

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

设:(a) 诸数 ε 形成一有穷的集合;(b) 数 ε 形成分数 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的无穷集合.可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 (a) 不能.因为 ε 不能任意地小.

(b) 可以.事实上,对于任给的 $\varepsilon > 0$,总可以取充分大的 n ,使 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.于是,存在 $\delta > 0$,使当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

670. 设已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x].$$

证明对于每一个 $\epsilon > 0.001$, 便可选出 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, 使得: 只要 $|x' - x| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x)| < \epsilon$. 而对于 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 这件事对于一切的值 x 都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当 $\epsilon > 0.001$, 且 $|x' - x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &= |x - x' + 0.001([x] - [x'])| \\ &\leq |x - x'| + 0.001 \end{aligned}$$

此时只要取 $\delta = \min\{\epsilon - 0.001, 1\}$, 则当 $|x - x'| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

当 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 且 x_0 不为整数时, 有整数 n , 使得 $n < x_0 < n + 1$. 只要取

$$\delta = \min(x_0 - n, n + 1 - x_0, \epsilon) > 0,$$

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $[x] = [x_0]$, 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leq \epsilon.$$

而当 $x_0 = n$ 为整数时, 则对于无论怎样选取正数 δ , 总有 x 满足

$$x < x_0 \text{ 及 } x_0 - x < \delta,$$

此时

$$|f(x) - f(x_0)| = (x_0 - x) + 0.001 > \epsilon.$$

于是, 函数 $f(x)$ 在 $x = n$ (整数) 的点失去了连续性.

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都有 $\epsilon = \epsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得: 只要 $|x - x_0| < \delta$, 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立. 从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?

由已知的不等式说明了函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能. 因为 ϵ 是由 δ 而确定的, 它不能任意小. 因此, 只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界. 事实上, $|f(x)| < |f(x_0)| + \epsilon$.

672. 设对于每一个数 $\epsilon > 0$, 都有数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.

从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由这些不等式说明了函数的什么性质?

解 不对, 若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a, b) 内有定义, 则只要取 $\delta = 2(b - a)$, 不等式 $|x - x_0| < \delta$ 恒成立. 若 (a, b) 为无穷区间, 例如, 设 $b = +\infty$, 则必然

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上, 若不然, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是, 存在数列 $x_n > a (n = 1, 2, \dots)$, $x_n \rightarrow +\infty$ 使 $f(x_n) \rightarrow c$. 由此可知数列 $f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 有界, 令

$$\epsilon_0 = \sup\{|f(x_n)| + |f(x_0)| + 1\} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon_0 (n = 1, 2, \dots),$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此 $\epsilon_0 > 0$, 不存在对应的 $\delta = \delta(\epsilon_0, x_0) > 0$, 此与假定矛盾. 由此可知, 必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x = x_0$, 都有数 $\epsilon = \epsilon(\delta,$

$x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.
从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由已知的不等式说明了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

674. 利用《 $\epsilon - \delta$ 》论证法证明下列函数的连续性: (a) $ax + b$; (б) x^2 ; (в) x^3 ; (г) \sqrt{x} ; (д) $\sqrt[3]{x}$; (e) $\sin x$; (ж) $\cos x$; (з) $\arctg x$.

证 (a) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon$, 只要

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以, $f(x) = ax + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

$$\begin{aligned} \text{(б)} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| \\ &\quad \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|). \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$, 只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| - \epsilon < 0,$$

即只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|$.

取 $\delta = \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0| > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon.$$

这就证明了 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$\begin{aligned} \text{(B) 由于 } |x^3 - x_0^3| &= |x - x_0| |x^2 + x_0x + x_0^2| \\ &\leq |x - x_0| (|x^2| + |x||x_0| + |x_0|^2), \end{aligned}$$

不妨设 $|x - x_0| < 1$, 则有 $|x| < 1 + |x_0|$ 及

$$|x^3 - x_0^3| < |x - x_0| (1 + 3|x_0| + 3x_0^2).$$

任给 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}\right)$, 则

当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^3 - x_0^3| < \epsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 这就证明了 x^3 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$\begin{aligned} \text{(r) 由于 } |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &= \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \quad (x_0 > 0). \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon \sqrt{x_0}$, 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \epsilon^2$.

(H) 由于

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| &= \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|} \\ &< \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0), \end{aligned}$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \epsilon \sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \epsilon^2$.

(e) 由于

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\leq |x - x_0|,$$

取 $\delta = \epsilon$, 即可得证.

(ж) 由于

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq |x - x_0| \end{aligned}$$

取 $\epsilon = \delta$, 即可得证.

$$(з) \text{ 由 } |\arctan x - \arctan x_0| = \left| \arctan \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|,$$

又因 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时, $|y| \leq |\operatorname{tg} y|$,

故有

$$|\arctan x - \arctan x_0| \leq \left| \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|.$$

当 $x_0 > 0$ 时, 不妨就 $|x - x_0| < |x_0| = x_0$ 进行讨论, 此时

$$|1 + xx_0| > 1, \text{ 则}$$

$$|\arctan x - \arctan x_0| \leq |x - x_0|.$$

当 $x_0 < 0$ 时可同样讨论.

所以, 取 $\delta = \min(\epsilon, |x_0|)$ ($x_0 = 0$ 时, 取 $\delta = \epsilon$),

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|\arctan x - \arctan x_0| < \epsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以 $\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.
研究下列函数的连续性并绘出其图形:

675. $f(x) = |x|.$

解 $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|,$

取 $\delta = \epsilon$, 即可证得在任一点的连续性, 如图 1. 263

所示.

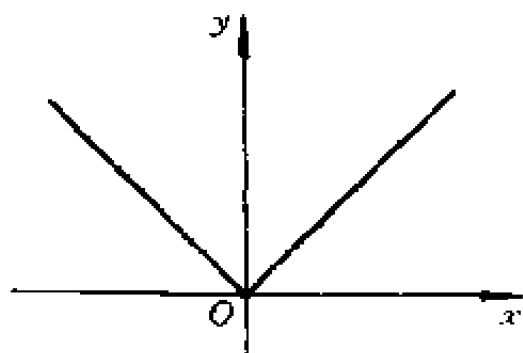


图 1.263

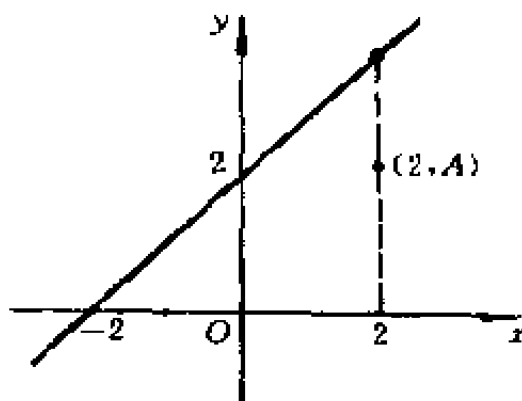


图 1.264

$$676. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2; \\ A, & \text{若 } x = 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4. \end{aligned}$$

因此,当 $A = 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处连续;而当 $A \neq 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处不连续. 至于在点 $x \neq 2$ 处显然是连续的,并且 $f(x) = x + 2 (x \neq 2)$.

如图 1.264 所示.

$$\begin{aligned} 677. \text{若 } x \neq -1, f(x) \\ &= \frac{1}{(1+x)^2}, \text{而 } f(-1) \\ &\text{是任意的.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 因为} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处不连续.

在点 $x \neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的.

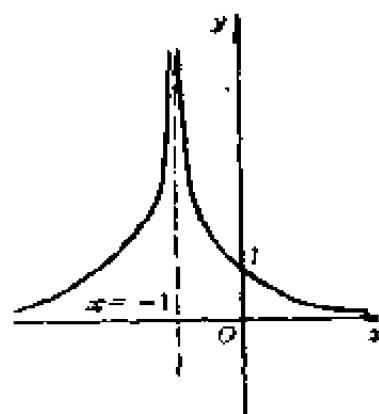


图 1.265

如图 1.265 所示.

678. (a) 若 $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|, \text{ 而 } f_1(0) = 1;$$

(6) 若 $x \neq 0$,

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \text{ 而 } f_2(0) = 1.$$

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$, 故 $f_1(x)$ 点点连续.

(6) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ 不存在, 因此 $f_2(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续, 其余各点均连续.

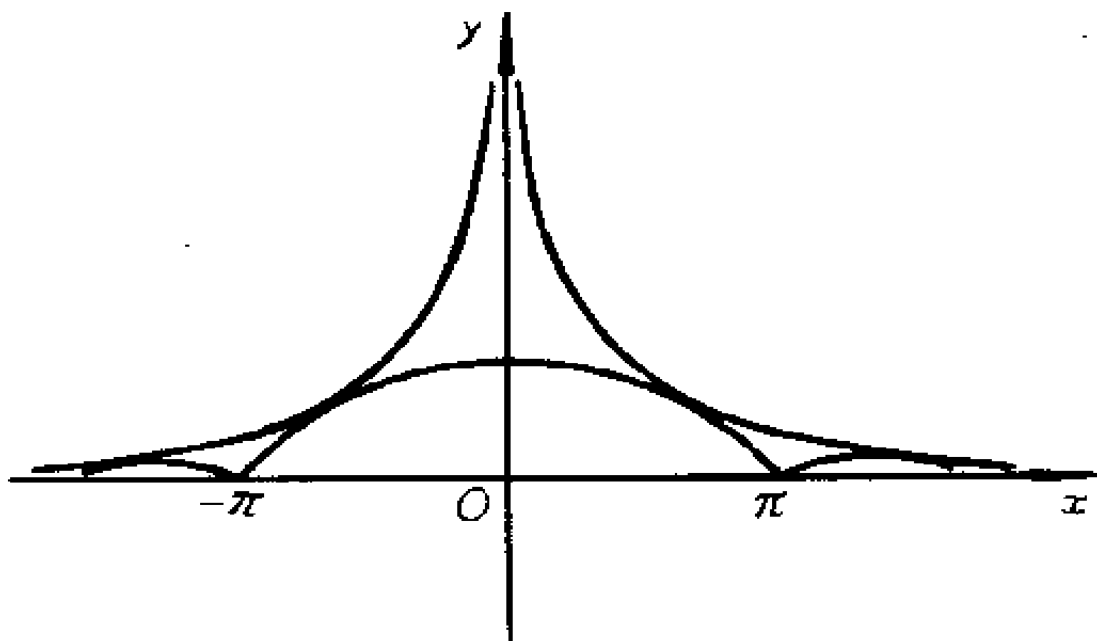


图 1.266

其中(a)的图形关于 Oy 轴对称(图 1.266), 而(6)的图形关于原点对称(图 1.267).

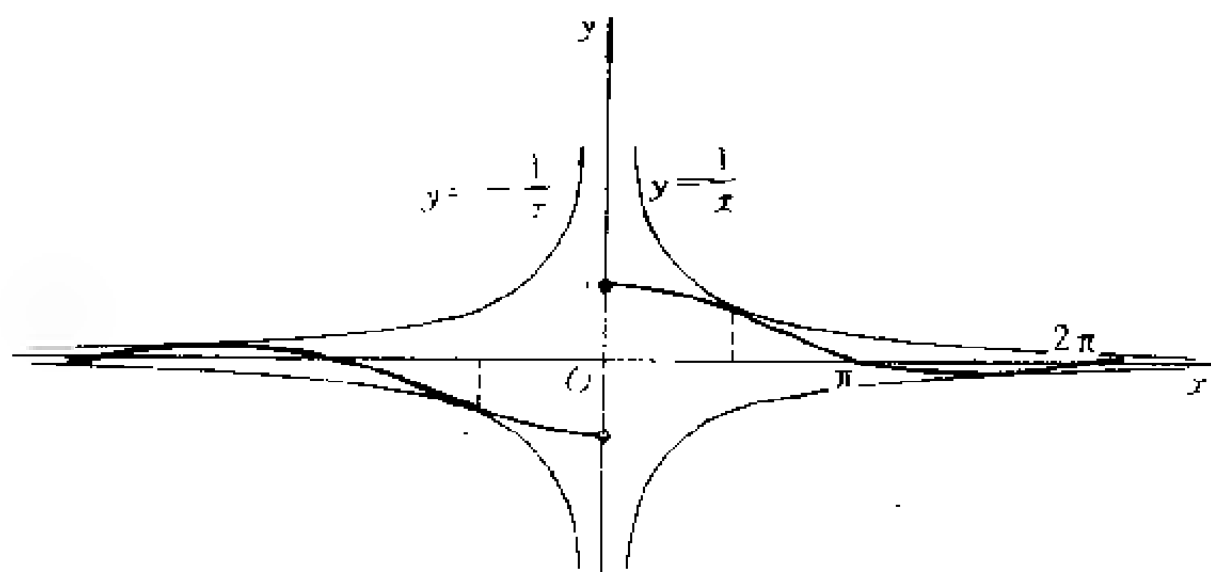


图 1.267

679. 若 $x \neq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0)$ 是任意的.

解 在 $x \neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续, 而在 $x = 0$ 不连续 (因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称, 图 1.268 仅为 $x > 0$ 的一部分.

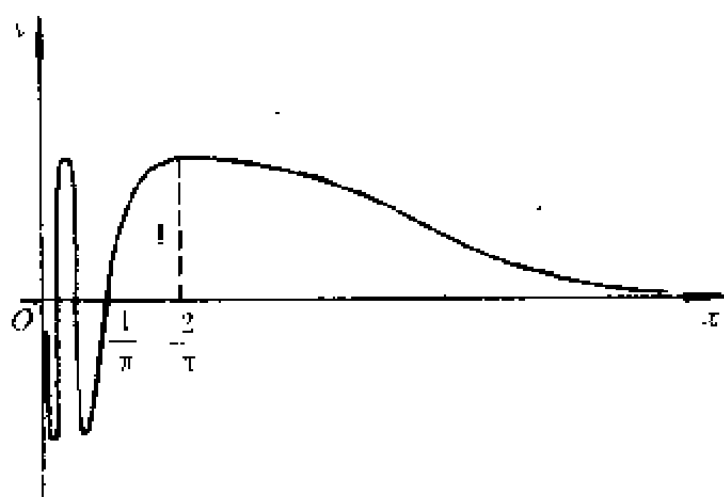


图 1.268

680. 若 $x \neq 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 点点连续.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.269 所示.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 且当 $|x| > \frac{2}{\pi}$ 时 $0 < y < 1$.

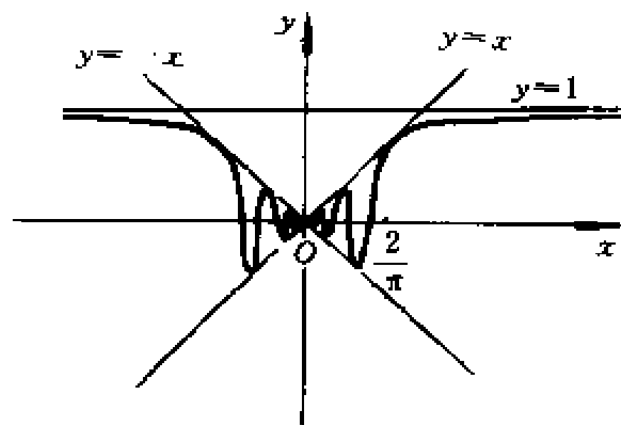


图 1.269

681. 若 $x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 点点连续.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.270 所示.

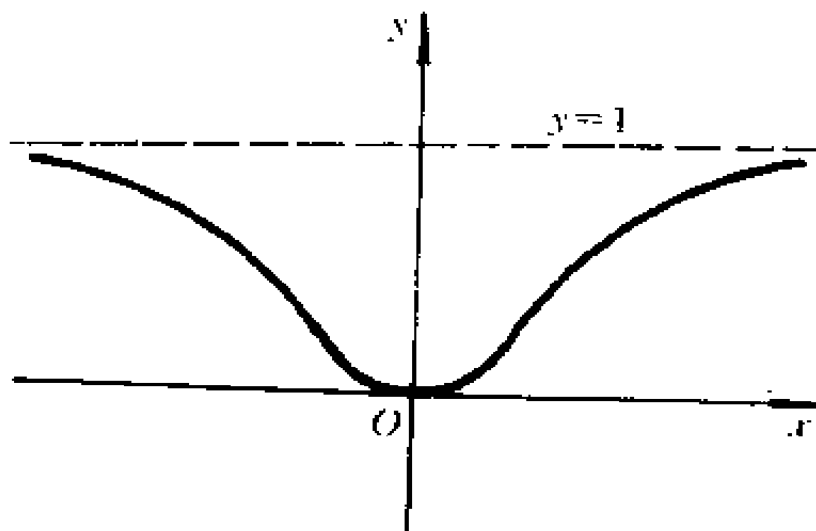


图 1.270

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 且 $0 < y < 1$.

682. 若 $x \neq 1, f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, 而 $f(1)$ 是任意的.

解 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0,$

除点 $x = 1$ 外其余点点连续.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$. 如图 1.271 所示.

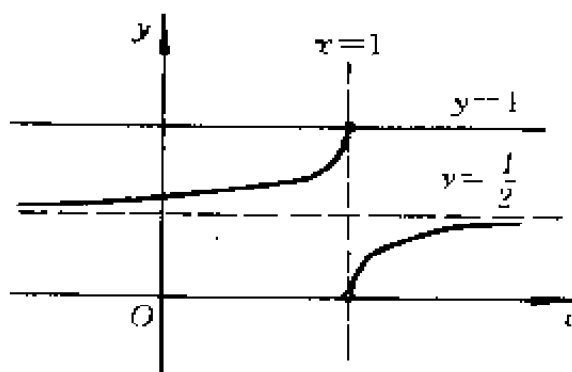


图 1.271

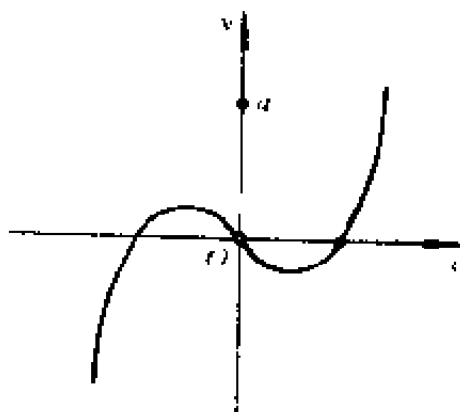


图 1.272

683. 若 $x \neq 0, f(x) = x \ln x^2$, 而 $f(0) = a$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0$

当 $a = 0$ 时, 点点连续; 而当 $a \neq 0$ 时, 除点 $x = 0$ 处不连续, 其余点点连续. 图形关于原点对称, 如图 1.272 所示.

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -1$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$.

除点 0 外, 点点连续.

如图 1.273 所示.

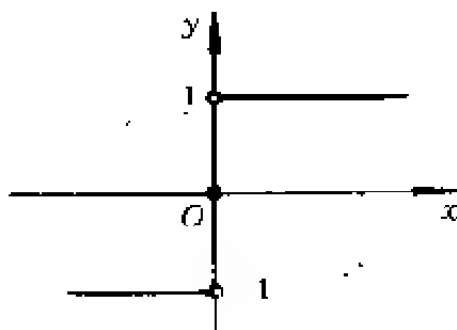


图 1.273

685. $f(x) = [x]$.

解 除当 $x = k$ (k 为整数) 外, 其余点点连续.

如图 1.274 所示.

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

解 当 $x = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) 时不连续. 当 $k^2 \leq x < (k+1)^2$ 时,
 $f(x) = \sqrt{x} - k$. $f[(k+1)^2] = 0$.

如图 1.275 所示.

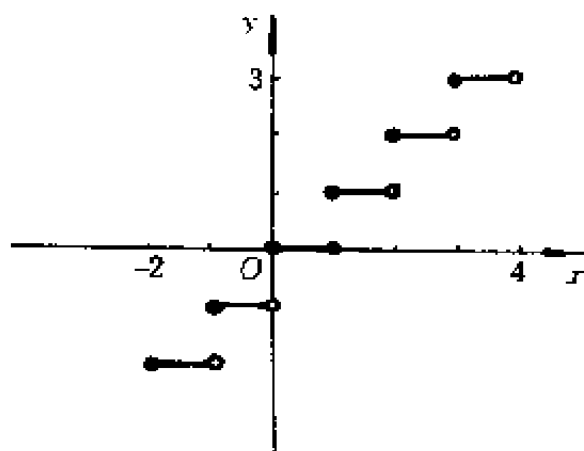


图 1.274

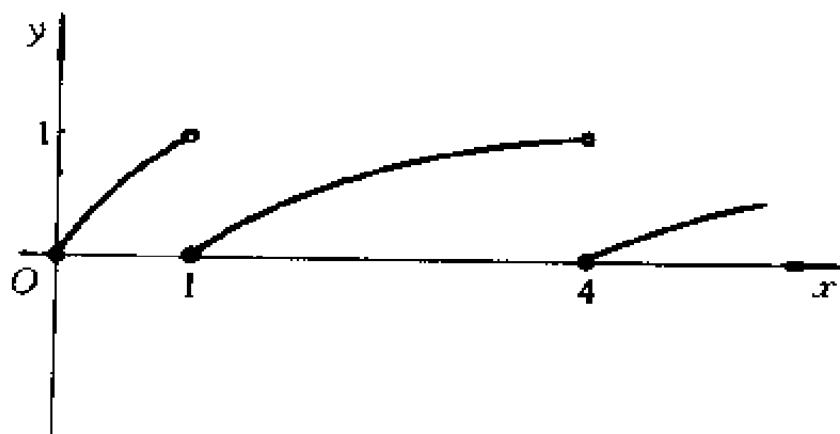


图 1.275

求出下列函数的不连续点, 并研究这些点的性质:

687. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

解 $x = -1$ 为无穷型不连续点.

688. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$,

故 $x = -1$ 为“可移去”的不连续点.

$$689. y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}.$$

解
$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)},$$

$x = 1$ 及 $x = -2$ 均为无穷型不连续点.

$$690. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = -1$, 及 $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$,

所以, $x = -1$ 为无穷型不连续点, 而 $x = 0$ 及 $x = 1$ 为“可移去”的不连续点.

$$691. y = \frac{x}{\sin x}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = \infty$ (k 为不等于零的整数),

所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

$$692. y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x) \cdot 2(2+x)}} = 0.$$

同理, $\lim_{x \rightarrow -2} y = 0$,

所以, $x = 2$ 及 $x = -2$ 为“可移去”的不连续点.

$$693. y = \cos^2 \frac{1}{x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y$ 不存在, 故 $x = 0$ 为第二类不连续点.

*) 左右极限均不存在.

$$694. y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} - 0} y = (-1)^k$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} + 0} y = (-1)^{k+1}$, 故 $x = \frac{1}{k}$

($k = \pm 1, \pm 2, \dots$)

为第一类不连续点.

$$695. y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

解 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为“可移去”的不连续点.

$$696. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$,

故 $x = 0$ 为第一类不连续点.

$$697. y = \sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

$$698. y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$,

所以, $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$699. y = \frac{1}{\ln x}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$,

所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = 1$ 为无

穷型不连续点.

$$700. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, 所以 $x = 1$ 为第一类不连续点, 而 $x = 0$,
 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续
 性并绘出其大略图形.

$$701. y = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

解 $x = k\pi (k = 0,$
 $\pm 1, \pm 2, \dots)$.

为第一类不连续点.

如图 1.276 所示.

$$702. y = x - [x].$$

解 $x = k (k = 0, \pm 1,$
 $\pm 2, \dots)$

为第一类不连续点.

如图 1.277 所示.

$$703. y = x[x].$$

解 $x = k (k = \pm 1, \pm 2,$
 $\dots)$ 为第一类不连续点.

如图 1.278 所示.

$$704. y = [x] \sin \pi x.$$

解 处处连续.

当 $x = k (k = 0$
 $, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $y = 0$.

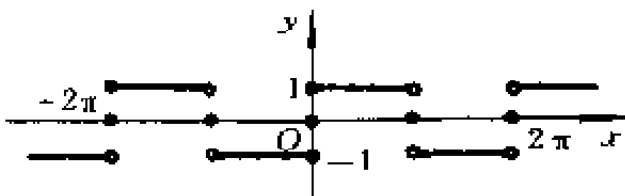


图 1.276

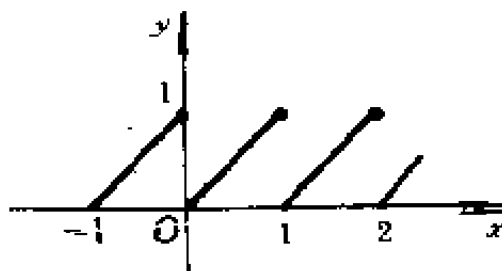


图 1.277

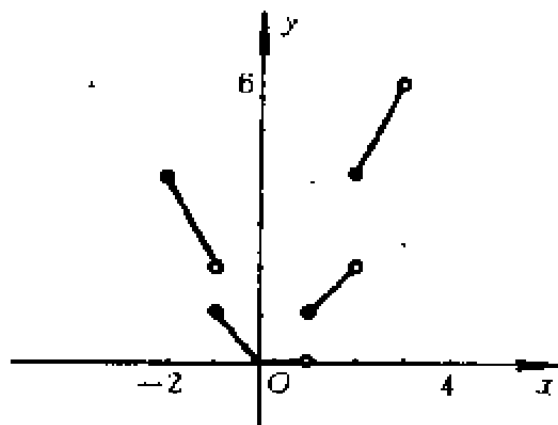


图 1.278

如图 1.279 所示.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

解 $x = \pm \sqrt{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) 为第一类不连续点.

如图 1.280 所示.

706. $y = [\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为无穷型不连续点, $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了 $x > 0$ 的部分, 并且在图形中两轴比例不一致, 即已经过“压缩”变换.

707. $y = x[\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当 $x > 0$ 的部分, 并且两轴所取的单位不一致.

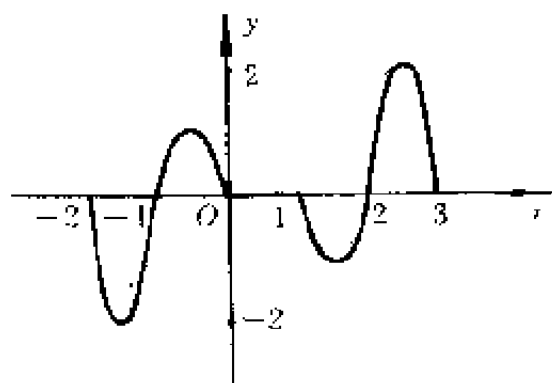


图 1.279

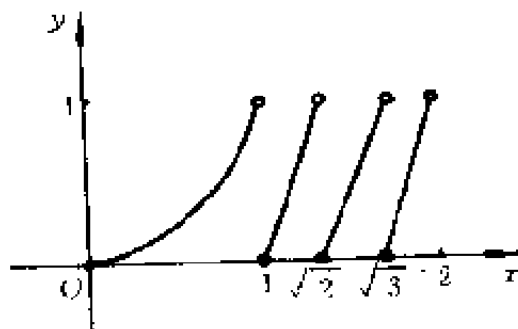


图 1.280

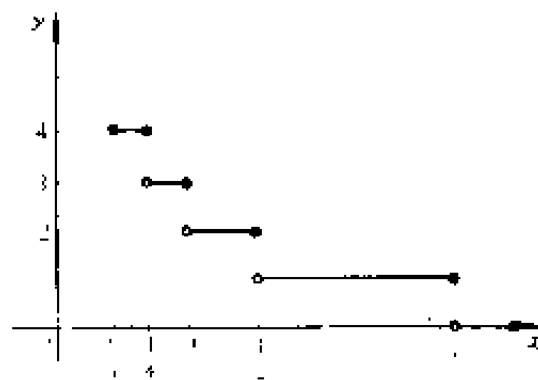


图 1.281

708. $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right).$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos \frac{1}{x} = 0$ 的点, 即 $x = \frac{2}{(2k-1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当 $k = 0, \pm 1, \pm 2$ 时的情形, 图形关于 Oy 轴对称.

709. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$x = \pm \frac{1}{k}$ 及 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k = 1, 2, \dots$)

为第一类不连续点.

图 1.284 仅画了 $x > 0$ 时的一部分. 又两轴所取的比例单位不同.

710. $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}.$

解 凡使 $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, 即

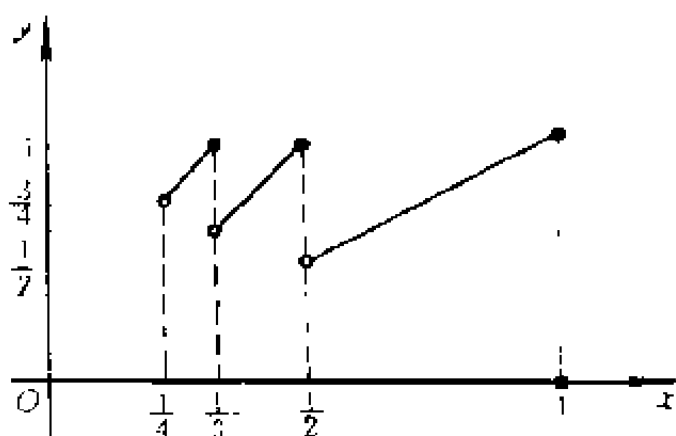


图 1.282

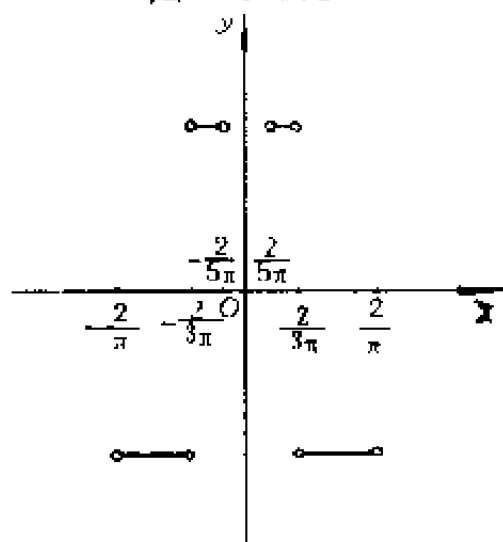


图 1.283

$$x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点.

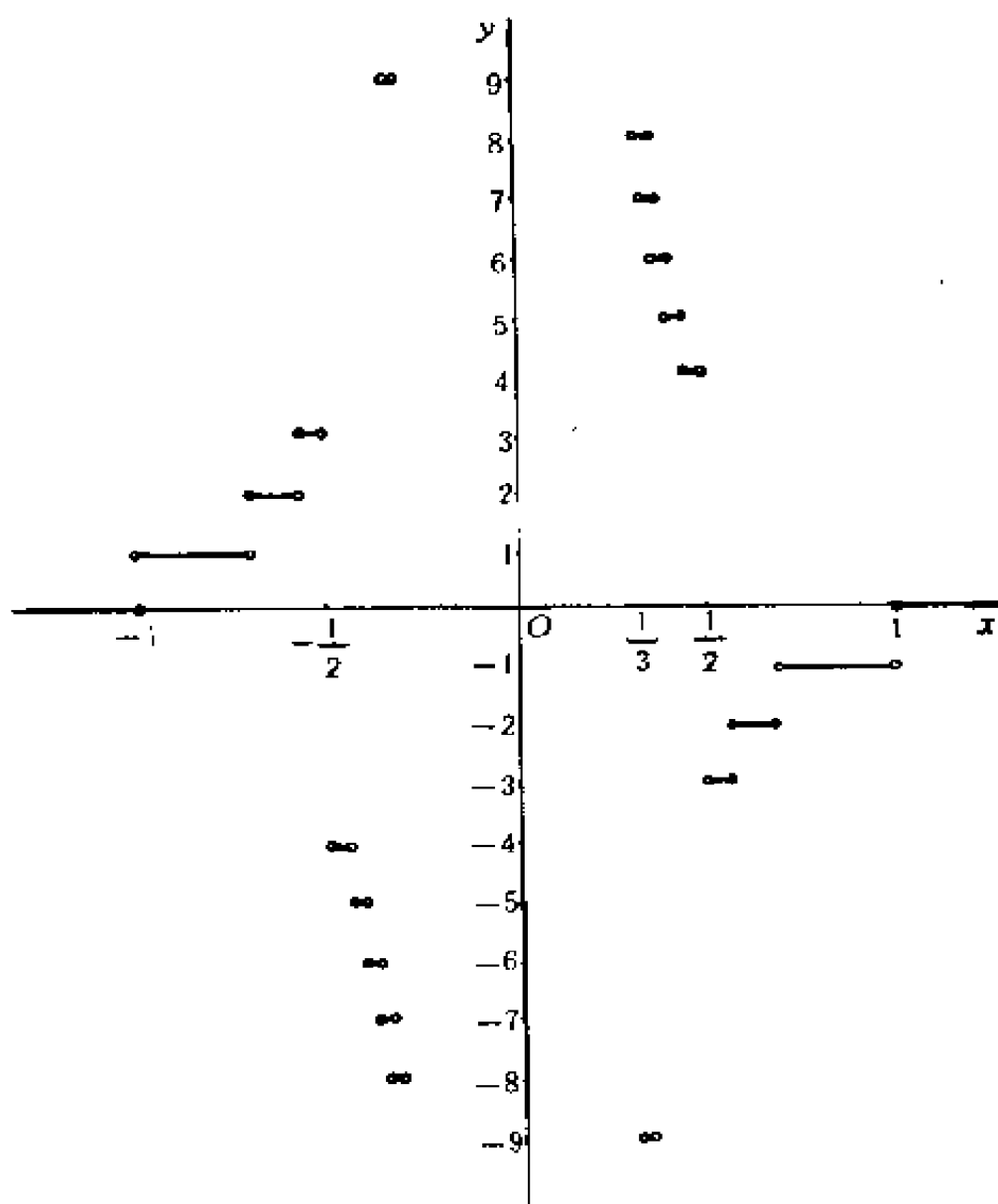


图 1.284

图形关于原点对称,如图 1.285 所示.

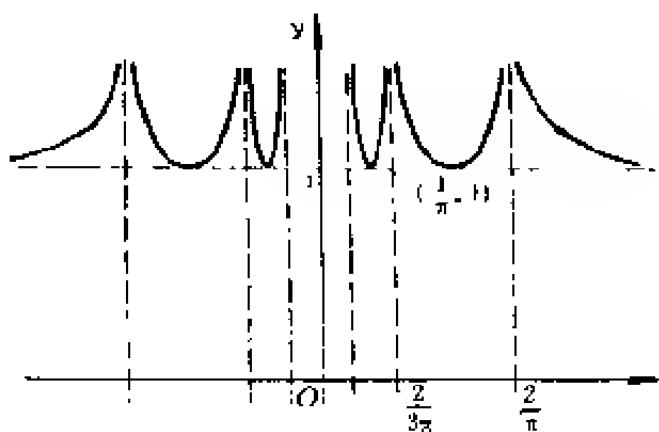


图 1.285

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$.

711. $y = \sec^2 \frac{1}{x}$.

解 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

$x = 0$ 为第二类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 1$.

如图 1.286 所示.

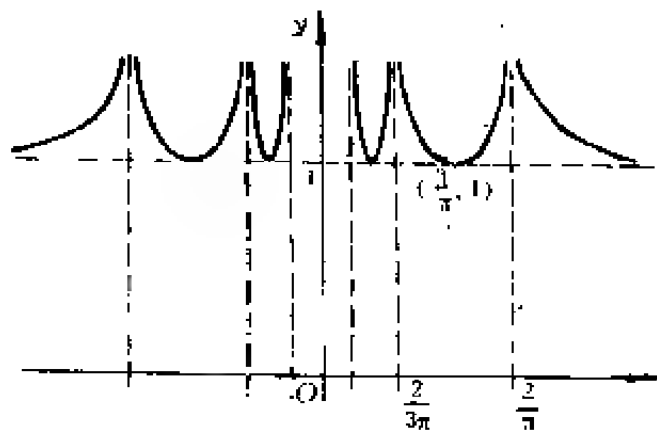


图 1.286

712. $y = (-1)^{x^2}$.

解 $x = \pm \sqrt{n} (n = 1, 2, \dots)$ 为第一类不连续点.

图形关于 Oy 轴对

称.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}-0} y = (-1)^{n-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}+0} y = (-1)^n.$$

如图 1.287 所示.

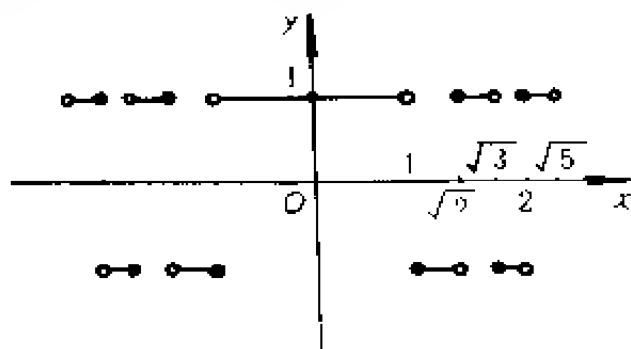


图 1.287

713. $y = \arctg\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$.

解 $x = 0, x = 1$ 和 $x = 2$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

如图 1.288 所示.

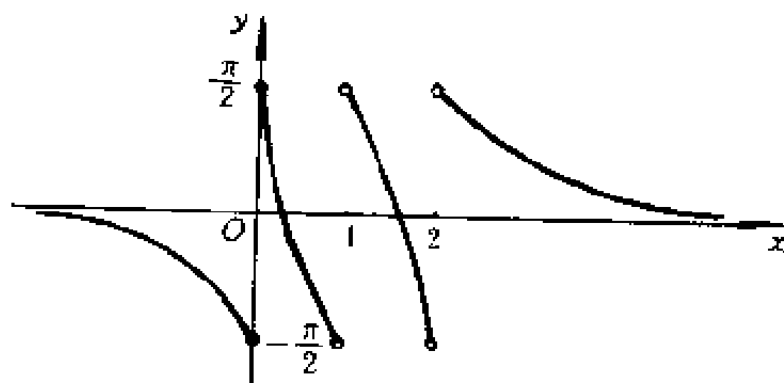


图 1.288

714. $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$

解 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.289 所示.

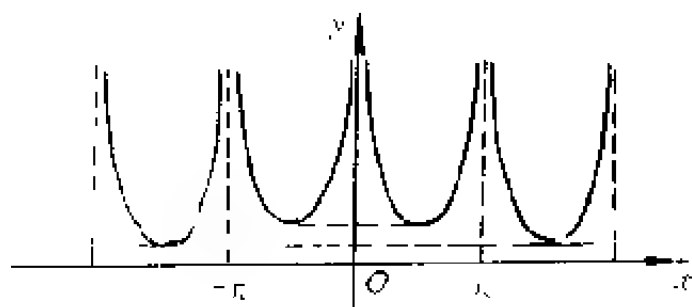


图 1.289

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$

解 $x = \pm \sqrt{k\pi} (k = 0, 1, 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.290 所示. 图中只画了 $x > 0$ 的一部分.

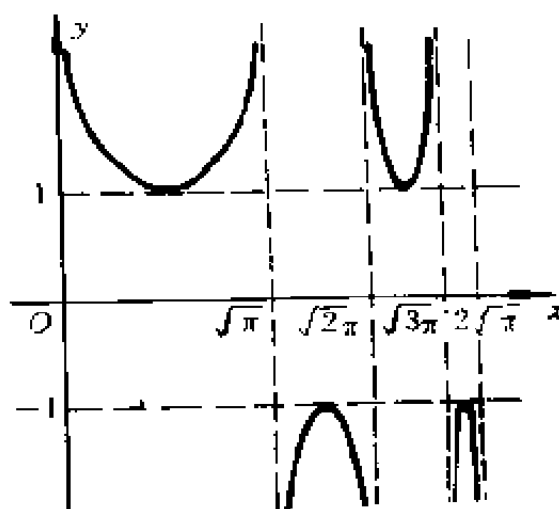


图 1.290

716. $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$

解 $x = -1$ 和 $x = 3$ 为无穷型不连续点.

定义域为 $x < -1$ 或 $x > 3$.

当 $x < \frac{-3}{2}$ 时, $0 < \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} < 1$, 故

$$\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} < 0.$$

当 $x > \frac{-3}{2}$ 时,

$$\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} > 1$$

$$\text{故 } \ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图 1.291 所示.

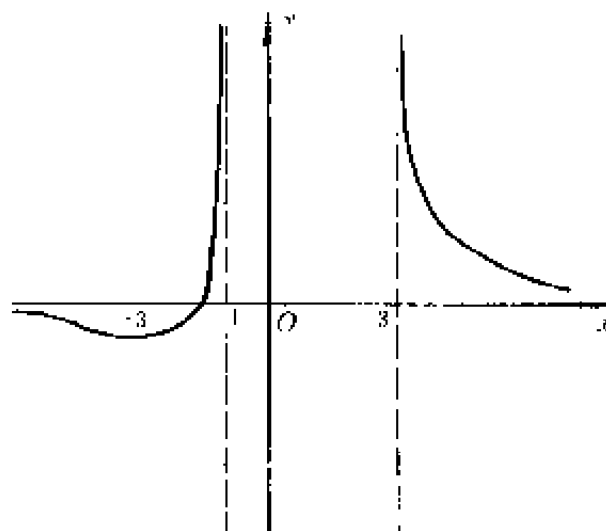


图 1.291

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty.$$

如图 1.292 所示.

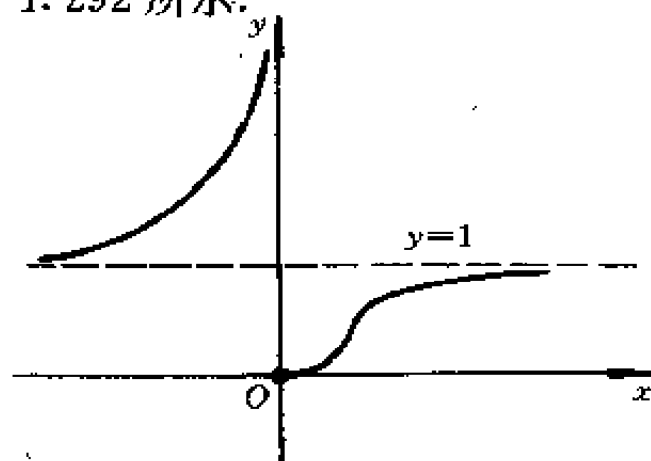


图 1.292

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$,

故 $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.293 所示.

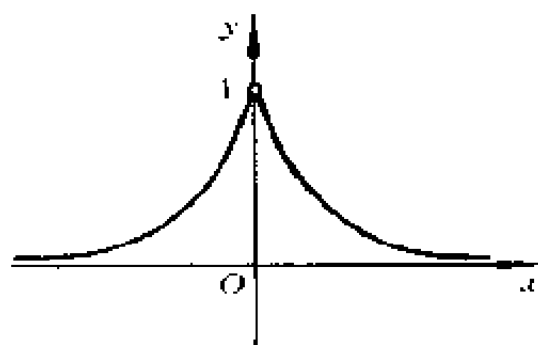


图 1.293

719. $y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2},$

解 $x = \pm 1$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -1.$$

图形关于原点对称,

如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图形:

720. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0).$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{当 } x > 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$

$x=1$ 为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

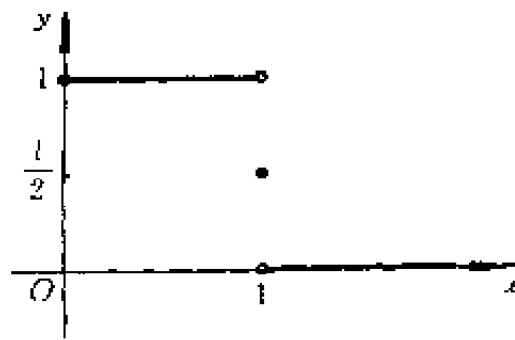


图 1.295

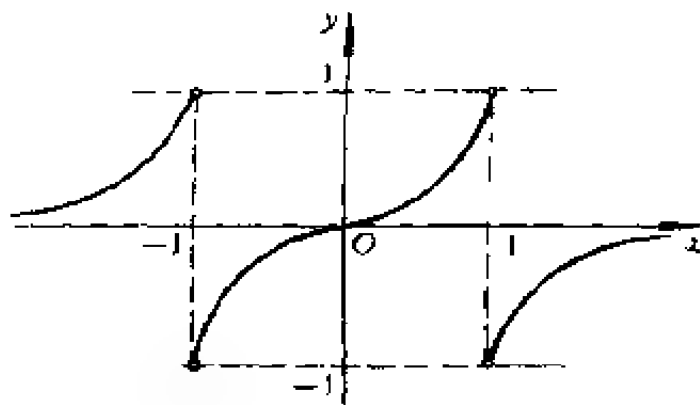


图 1.294

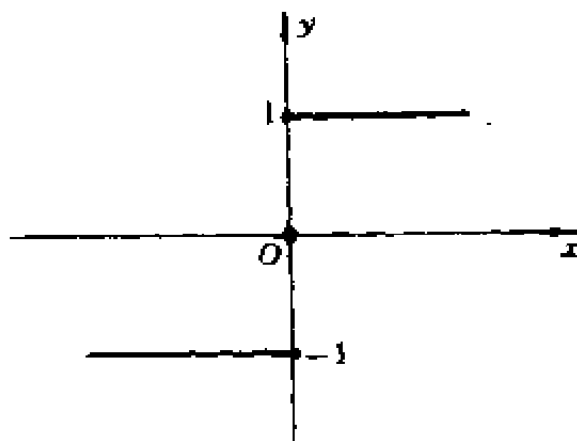


图 1.296

$$721. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } y = \operatorname{sgn} x.$$

$x=0$ 为第一类不连续点, 如图 1.296 所示.

$$722. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ x^2, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.297 所示.

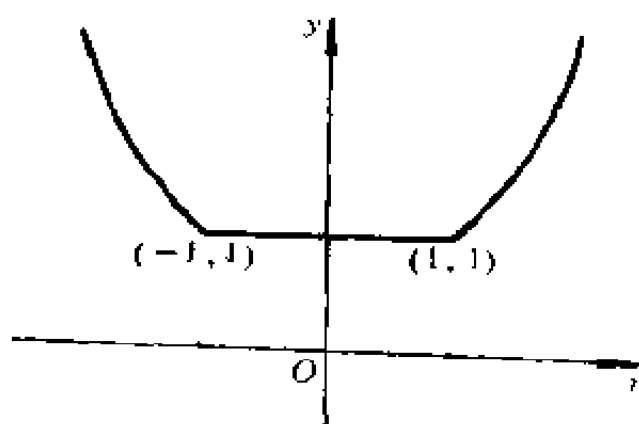


图 1.297

$$723. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = k\pi, \\ 0, & \text{当 } x \neq k\pi. \end{cases}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$x = k\pi$ 为第一类不连续点, 如图 1.298 所示.

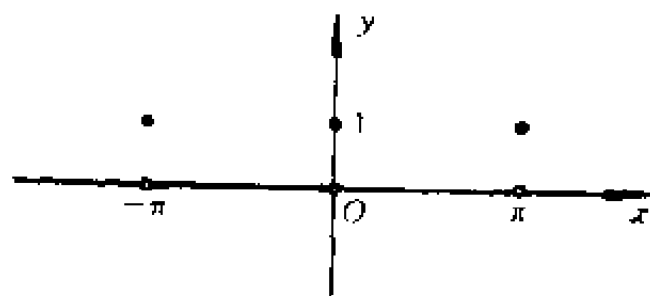


图 1.298

$$724. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}.$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{当 } \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

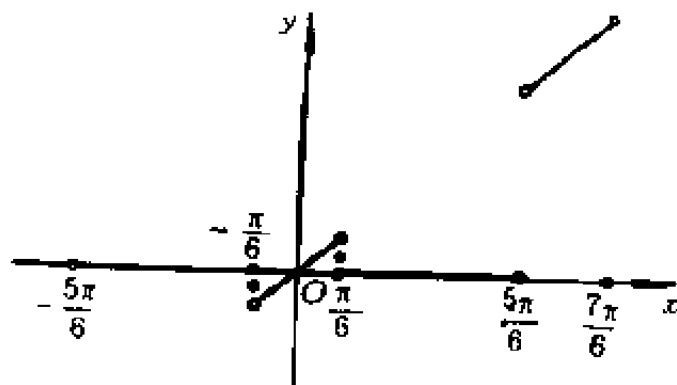


图 1.299

725. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)]$.

$$\text{解 } y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi; \\ 0, & \text{当 } x = k\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \neq 0$) 为第一类不连续点, 如图 1.300 所示.

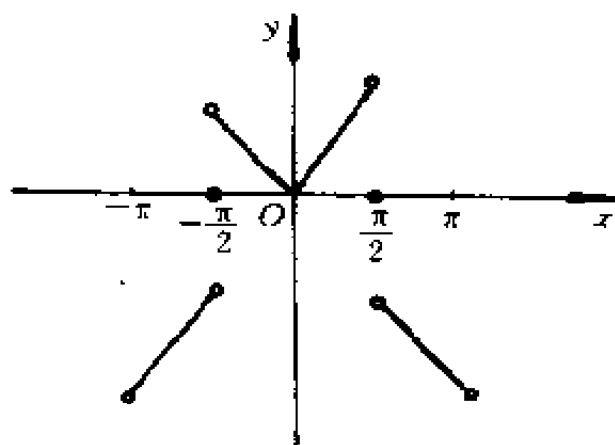


图 1.300

$$726. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}.$$

解 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \leq 0; \\ x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

处处连续, 如图 1.301 所示.

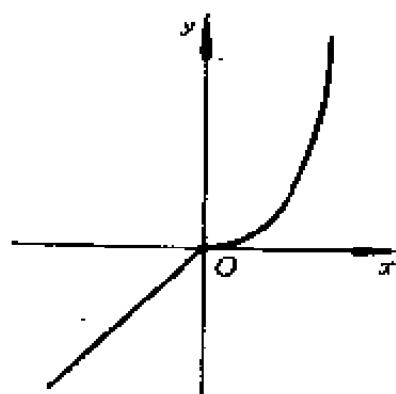


图 1.301

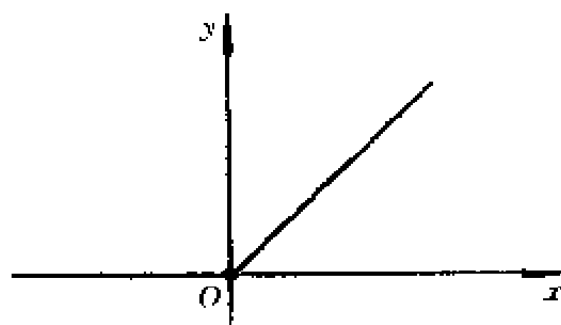


图 1.302

$$727. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{tx})}{\ln(1 + e^t)}.$$

解 $y = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0; \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

处处连续, 如图 1.302 所示.

$$728. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x)^{tx}.$$

解

$$y = \begin{cases} -(1+x), & \text{当 } x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1+x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

$x=0$ 为第一类不连续点.

如图 1.303 所示.

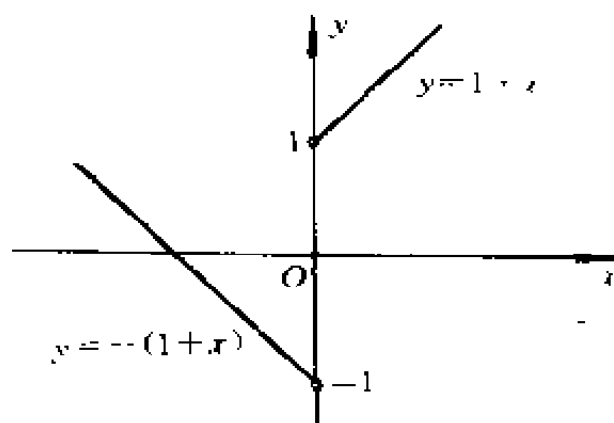


图 1.303

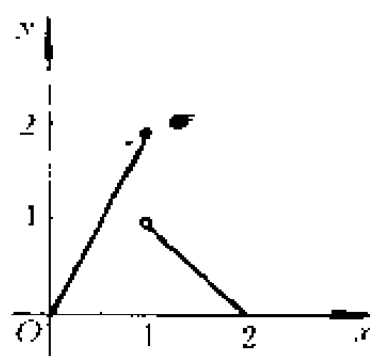


图 1.304

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

是否为连续函数?

解 $x=1$ 为第一类不连续点, 在 $[0, 2]$ 上 $f(x)$ 不是连续函数.

如图 1.304 所示.

730. 设:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x < 0; \\ a+x, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

当怎样选择数 a , 函数 $f(x)$ 方为连续的?

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = a$ 及 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$,

而 $f(0) = a$, 故当 $a = 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；至于当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然连续.

于是, 我们选择数 $a=1$, 则函数 $f(x)$ 在整个数轴上为连续的, 如图 1.305 所示.

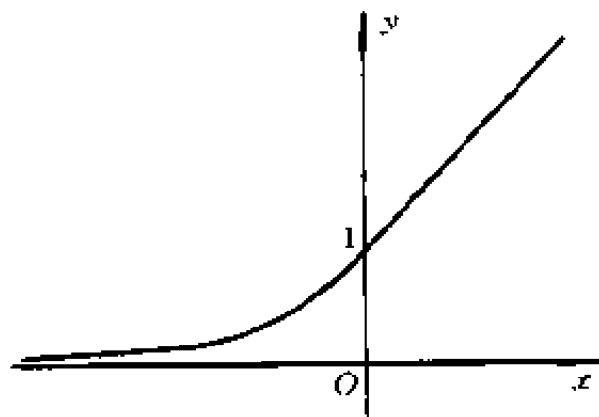


图 1.305

731. 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质, 设:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(v) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ |x-1|, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(r) f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & \text{当 } x \text{ 为非整数;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为整数;} \end{cases}$$

$$(д) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

解 (a) 连续函数.

(b) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(B) $x = -1$ 为第一类不连续点.

(Г) $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

(П) $x \neq k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第二类不连续点.

732. 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式, 作出其图形并研究其连续性.

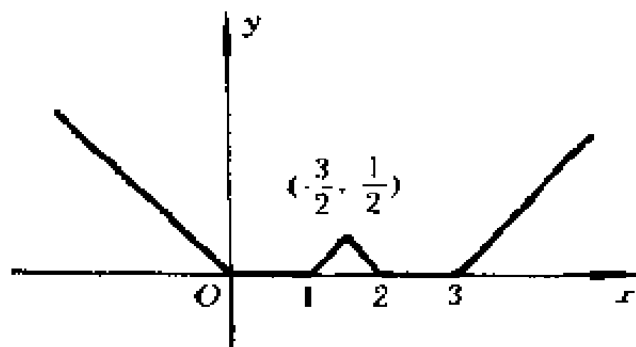


图 1.306

解

$$d = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1; \\ x-1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}; \\ 2-x, & \frac{3}{2} < x < 2; \\ 0, & 2 \leq x \leq 3; \\ x-3, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.306 所示.

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图 1.307). 函数 $S = S(y) (0 \leq y < +\infty)$ 是图形 E 介于平行线 $Y = 0$ 及 $Y = y$ 之间的那一部分面积; 而函数 $b = b(y) (0 \leq y < +\infty)$ 是用平行线 $Y = y$

去截图形所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式, 作出它们的图形并研究其连续性.

解

$$S = \begin{cases} 3y - \frac{y^2}{2}, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{1}{2} + 2y, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ \frac{5}{2} + y, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ \frac{11}{2}, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.308 所示.

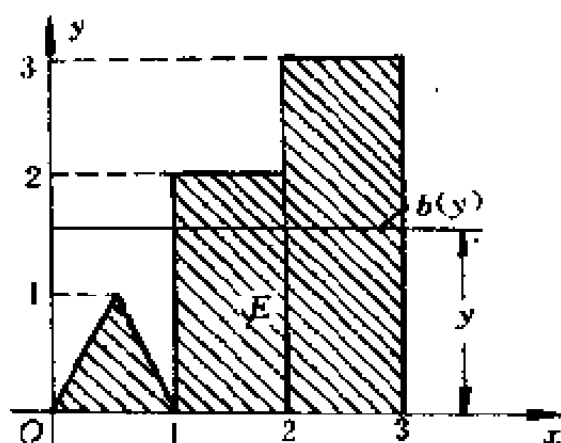


图 1.307

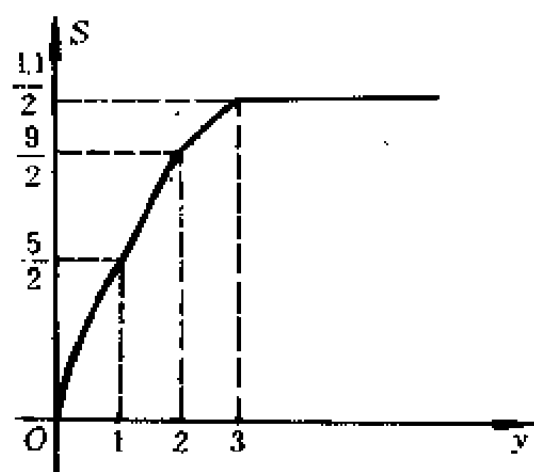


图 1.308

对于函数 $b=b(y)$ 根据假设, 则有如下解析表示式:

$$b = \begin{cases} 3-y, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ 2, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ 1, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ 0, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点, 如图 1.309 所示.

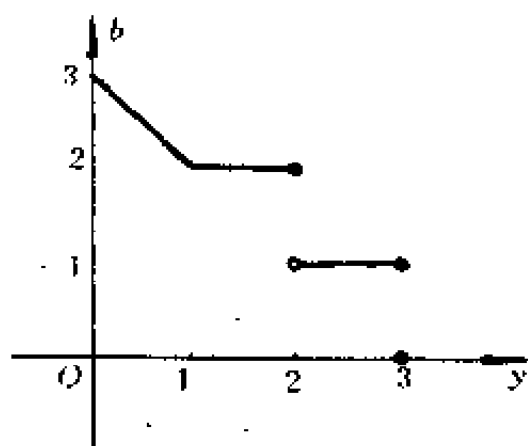


图 1.309

734. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m, n) = \cos^n(\pi m! x)$.

当 x 为有理数时, 总可认为 $m > p$, 其中 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为互质的整数), 于是 $f(m, n) = 1$, 故此时

$$\chi(x) = 1;$$

当 x 为无理数时, 则对任一固定的 m 而言,
 $|\cos(\pi m! x)| < 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) = 0,$$

故此时 $\chi(x) = 0$.

总之,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

由实数的稠密性可知, 对于 x 的任意值在其任一邻域内均含有无限个有理数和无理数, 因而 $\chi(x)$ 的值总在

1 和 0 这两数中取一个, 这样, $\chi(x)$ 的极限就不存在. 于是, 当 x 取任一值时, $\chi(x)$ 都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x) = x \cdot \chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为迪里黑里函数 (参阅上例), 研究此函数 $f(x)$ 的连续性. 作出这函数的略图.

解

$$x \cdot \chi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及 } 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

因此,

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \chi(x) = 0$ 等于在 $x=0$ 处的函数值, 故当 $x \neq 0$ 时, $x \cdot \chi(x)$ 不连续, 而当 $x=0$ 时, $x \cdot \chi(x)$ 连续, 如图 1.310 所示.

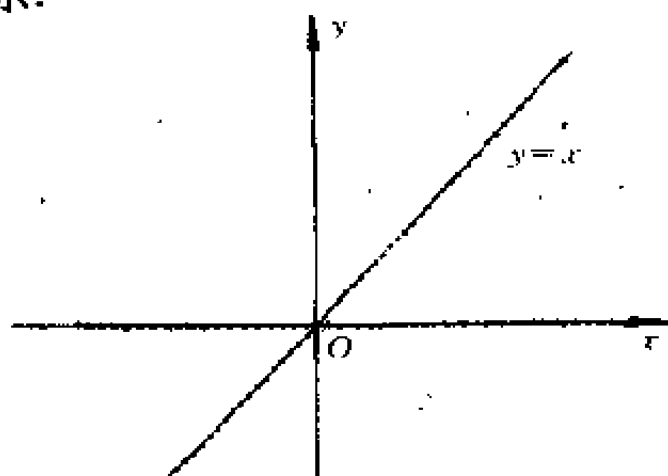


图 1.310

736. 证明黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的, 而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证 不失一般性,我们仅就区间 $[0,1]$ 讨论,图 1.311 为 $f(x)$ 在 $x \in [0,2]$ 时的略图.

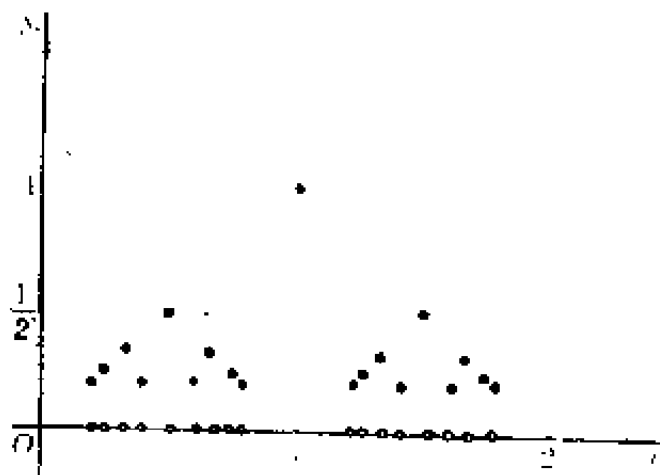


图 1.311

对于任意的 $x_0 \in [0,1]$ 来说,若任取 $\epsilon > 0$,则满足不等式 $n < \frac{1}{\epsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限个,即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\frac{m}{n}$,使得 $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \geq \epsilon$. 因而我们可以取 $\delta > 0$,使得 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内不含有这样的有理数(若 x_0 为有理数,则可能除去 x_0). 于是,只要 $0 < |x - x_0| < \delta$,不论 x 是否为有理数,都成立 $|f(x)| < \epsilon$. 即证明了对于 $[0,1]$ 中任意点 x_0 ,都成立

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若 x_0 为无理数,则 $f(x_0) = 0$,可见 $f(x)$ 在 x_0 连续;若 x_0 是有理数,则 $f(x_0) \neq 0$,函数 $f(x)$ 在 x_0 点有可移间断.

737. 若 x 是既约有理分数 $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) 时, $f(x) = \frac{nx}{n+1}$; 若 x 是无理数时, $f(x) = |x|$.

试研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出此函数的略图.

证 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 显然不连续, 而对于正有理数 $\xi = \frac{m}{n}$, $f(\xi) = \frac{m}{n+1}$. 若我们取一系列无理数 x_k 趋于 ξ , 则 $\lim_{x_k \rightarrow \xi} f(x_k) = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1}$, 故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续. 当 ξ 为正无理数时, 由于对任意的 $\varepsilon > 0$, 满足 $\frac{1}{q} > \varepsilon$ 的自然数 q 至多只有有限个. 与 736 题类似可证 $f(x)$ 在点 $x = \xi$ 连续. 如图 1.312 所示.

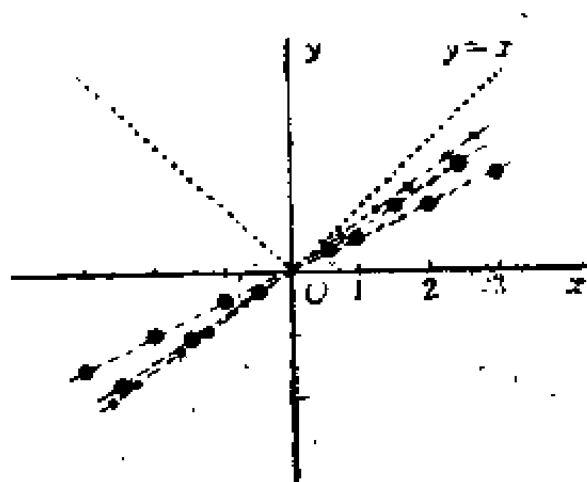


图 1.312

738. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 除 $x = 0$ 外, 对于自变数 x 的一切值都有定义. 为了使此函数当 $x = 0$ 是连续的, 则在 $x = 0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值?

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

所以, 应取 $f(0) = \frac{1}{2}$, 那么, $f(x)$ 当 $x = 0$ 时是连续的.

739. 证明不管怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 是不连续的.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$, 所以, 我们无法选择 $f(1)$ 使之成为连续的.

740. 当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 失去意义, 定义 $f(0)$ 的数值, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 若:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, \quad (b) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x},$$

$$(в) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}; \quad (r) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(д) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (e) f(x) = x^x (x > 0);$$

$$(ж) f(x) = x \ln^2 x.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{3}{2},$$

取 $f(0) = \frac{3}{2}$ 即行.

$$(b) f(0) = 2.$$

$$(в) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

$$(r) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 故取 } f(0) = e.$$

$$(д) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

$$(e) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1, \text{ 故取 } f(0) = 1.$$

$$(ж) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

741. 设: (a) 函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的, 而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的; (b) 当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的, 则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

解 (a) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的. 事实上,

设 $F(x)=f(x)+g(x)$

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$, 如果 $F(x)$ 在 x_0 连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [F(x) - f(x)]$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F(x_0) - f(x_0) = g(x_0).$$

因此当 $g(x)$ 有意义的话, 那么 $g(x_0) = F(x_0) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 这与假设是矛盾的, 故 $F(x)$ 在点 x_0 不连续; 若 $g(x_0)$ 没有意义, 那么当然它在 x_0 点不连续.

(b) 不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases} \text{ 及 } g(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \geq 0, \\ 1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续, 但其和 $f(x)+g(x) \equiv 0$ 却处处连续.

742. 设: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续; (b) 当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的. 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续? 举出适当的例子.

解 (a) 不. 例如,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases} \text{ 及 } f(x) = 0.$$

它们满足假设条件, 其中 $f(x)$ 处处连续, 而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) \equiv 0$ 处处连续.

(6) 不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}, \text{ 及 } g(x) = f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续, 但其乘积 $f(x)g(x) \equiv 1$ 却处处连续.

743. 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数? 举出处处都有不连续点的函数, 而平方后是连续函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(6)之例.

又对于函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

处处不连续, 但平方后所得函数 $f^2(x) \equiv 1$ 却处处连续.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性, 设:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x^2$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = x(1 - x^2)$;

(B) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x - [x]$.

解 (a) $f[g(x)] \equiv 1$ 处处连续;

$$\text{而 } g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x \neq 0; \\ 1, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 点不连续.

(b) 因为 $g(x) = x(1 - x^2)$ 当 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ 时为正, 而当 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时为负, 故

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < -1; \\ 0, & \text{当 } x = -1; \\ -1, & \text{当 } -1 < x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1, & \text{当 } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 1; \\ -1, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

在点 $x = -1, x = 0, x = 1$ 处不连续.

而 $g[f(x)] = 0$ 却处处连续.

(B) $f[g(x)] = 1$ 处处连续.

$g[f(x)] = 1$ 也处处连续.

745. 设

$$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \leq 1; \\ 2-u, & 1 < u < 2, \end{cases}$$

$$\text{及 } \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ 2-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

研究复合函数 $y = f(u)$ 的连续性, 其中 $u = \varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时, $u = x$, 且 $0 < u < 1$, 故 $f(u) = x$;
当 x 为无理数时, $u = 2-x$ 且 $1 < u < 2$, 故 $f(u) = 2-u = x$. 从而 $f[\varphi(x)] = x$ 处处连续.

746. 证明若 $f(x)$ 为连续函数, 则下列函数也是连续的:

$$F(x) = |f(x)|.$$

证 设 x_0 为任一连续点, 则对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在一个正数 δ , 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

由 $||f(x) - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$ 知

$$||f(x)| - |f(x_0)|| < \epsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续.

747. 证明若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c, \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是连续函数.

证 易知

$$f_c(x) = \frac{1}{2} (|c + f(x)| - |c - f(x)|).$$

于是, 利用 746 题的结果, 即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

748. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} \{f(t)\} \text{ 和 } M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$$

在 $[a, b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0 \in [a, b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq m(x_0) - \varepsilon.$$

而当 $a \leq x \leq x_0$ 时, $f(x) \geq m(x_0) > m(x_0) - \varepsilon$. 由此可知当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, $m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的, 故

$$m(x_0) \geq m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon \text{ (当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时)}.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续, 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 的最小值在点 $x = x_0$ 达到, 即 $m(x_0) = f(x_0)$ (否则, 若 $m(x_0) = f(x_1)$, $a \leq x_1 <$

x_0 . 则显然知, 当 $x_0 < x < x_0$ 时 $m(x) \equiv m(x_0)$, 从而左连续). 任给 $\varepsilon > 0$. 仿上述, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = m(x_0) + \varepsilon,$$

因此 $m(x) < m(x_0) + \varepsilon$, 从而

$$m(x_0) \leq m(x) < m(x_0) + \varepsilon \text{ (当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时)}.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

749. 证明 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数 $\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$ 和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$ 也是连续的.

证 由 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

利用 746 题的结果, 即知 $\varphi(x), \psi(x)$ 为连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并有界, 证明函数 $m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$ 和 $M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 是左方连续的. 而函数

$$\bar{m}(x) = \inf_{a \leq t \leq x} \{f(t)\} \text{ 和 } \bar{M}(x) = \sup_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$$

在闭区间 $[a, b]$ 是右方连续的.

证 设 $x_0 \in (a, b]$, 要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 故 $m(x)$ 恒为有限, 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在一点 $\xi_0 \in [a, x_0)$, 使得

$$f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon.$$

于是, 当 $\xi_0 < x < x_0$ 时, 必有 $m(x_0) \leq m(x) \leq f(\xi_0) < m$

$(x_0) + \varepsilon$, 由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} m(x) = m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 也为左方连续.

*) $\overline{m}(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续的结论是错误的, 今举反例以明之, 例如, 对于有界函数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b. \end{cases}$$

分别有

$$\overline{m}(x) = f_1(x), \overline{M}(x) = f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\overline{m}(x) = \inf_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$, $\overline{M}(x) = \sup_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$, 则可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $\overline{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续.

751. 证明若函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且有有限的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则此函数在已知区间上是有界的.

证. 记 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $X > a$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x)| < |A| + 1$, 又因 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 因而有界, 即存在常数 M_1 , 使当 $x \in [a, X]$ 时, 恒有 $|f(x)| < M_1$, 取 $M = \max(|A| + 1, M_1)$, 则 $x \in [a, +\infty)$ 时, 恒有

$$|f(x)| < M.$$

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续并有界, 证明对于任何数 T , 可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

证 不妨设 $T > 0$, 记 $g(y) = f(x_0 + (y+1)T) - f(x_0 + yT)$, $y \geq 1$. 取一数列 $\{\varepsilon_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. 易见, $g(y)$ 是 $[1, +\infty)$ 上连续且有界的函数, 今按下法取 $x_1 = x_0 + k_1 T$, 使 $|g(k_1)| < \varepsilon_1$. 如果 $g(1), g(2)$ 异号, 则由连续函数介值定理, 存在 k_1 , 且 $1 < k_1 < 2$, 使得 $|g(k_1)| = 0 < \varepsilon_1$, 这时取 $x_1 = x_0 + k_1 T$. 若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号, 且 $g(1), g(2), g(3), g(4) \dots$ 都是同号的, 不妨设它们均大于 0, 那么我们可以证明, 必存在一个自然数 $k_1 \geq 1$, 使 $|g(k_1)| < \varepsilon_1$. 因为, 若对一切自然数 n , $g(n) \geq \varepsilon_1$, 则由 $g(y)$ 的定义,

$$f(x_0 + 2T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + T),$$

$$f(x_0 + 3T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 2T),$$

$$f(x_0 + 4T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 3T),$$

.....

$$f(x_0 + nT) \geq \varepsilon_1 + f[x_0 + (n-1)T].$$

则 $f(x_0 + nT) \geq (n-1)\varepsilon_1 + f(x_0 + T)$, 这与 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有界矛盾, 故必存在自然数 k_1 , 使得 $|g(k_1)| < \varepsilon_1$, 取 $x_1 = x_0 + k_1 T$. 然后, 取自然数 $p_2 > k_1 + 1$. 通过考虑 $g(p_2), g(p_2+1), \dots$ 的符号; 仿上, 可取 $x_2 = x_0 + k_2 T$, $k_2 > k_1 + 1$, 值 $|g(k_2)| < \varepsilon_2$. 依此类推, 我们就可得到一数列 $\{x_n\}$ 适合要求.

753. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有定义且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同, 设 $\varphi(x)$ 的周期为

p , 则 $\varphi(x+p) = \varphi(x)$, 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x+p) - \psi(x+p) \rightarrow 0$ 即得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] = 0$$

以及

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) - \psi(x+p)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] - \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

我们再来证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p , 若不然, 则至少存在一个 x_0 , 使 $\psi(x_0) \neq \psi(x_0+p)$. 且设 $\psi(x)$ 周期为 q , N 为任意正整数, $x = x_0 + Nq$, 以及 $a = |\psi(x_0) - \psi(x_0+p)| > 0$, 此时恒有 $|\psi(x) - \psi(x+p)| = a$. 但由 (1) 式, 对充分大的 x , 必成立 $|\psi(x) - \psi(x+p)| < a$, 这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, 若结论不成立, 则至少存在一个 x_1 , 使 $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$. 记 $\beta = |\varphi(x_1) - \psi(x_1)| > 0$, 则对任意 $x = x_1 + Np$, 恒有 $|\varphi(x) - \psi(x)| = \beta$, 这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ 矛盾. 于是, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 证毕.

754. 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增函数, 取其定义域 A 中的任意点 x_0 , 且设 x_0 不是 A 的左端点, 由于 $x < x_0$ 时显然有 $f(x) \leq f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知 $f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \leq f(x_0)$. 可见若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则函数在该点只可能有跃度, 即第一类间断点.

755. 证明若函数 $f(x)$ 具有下列诸性质: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调, (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作

为其函数值,则此函数在 $[a, b]$ 上连续.

证 用反证法,不妨设单调函数 $f(x)$ 为递增的且在 x_0 间断($x_0 \in [a, b]$),由 754 题知 x_0 只能是第一类间断点,则 $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ 中至少有一个大于零,例如 $f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0$. 于是,由函数 $f(x)$ 的单调性知, $f(x)$ 无法取到 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0)$ 之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$ 的性质(2)矛盾,从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

756. 证明:函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a}, \text{ 若 } x \neq a \text{ 及 } f(a) = 0,$$

在任意闭区间 $[a, b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中介值,但在 $[a, b]$ 上并不连续.

证 事实上,只要 $a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取 $[-1, 1]$ 之间的一切值,当然更取 $f(a) = 0$ 与 $f(b)$ ($|f(b)| \leq 1$) 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

757. 证明:若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续,且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意值,则在它们之间可找到一个数值 ξ , 值得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

证 不妨设 $a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < b$, 此时设 $x_1 \neq x_n$, 当 $x_1 = x_n$ 结论显然成立.

由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续,于是, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上取得最大值和最小值:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [x_1, x_n].$$

从而有

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

由连续函数的性质,总存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且

$$l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 及 } L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

证明对于任意的数 λ , 此处 $l \leq \lambda \leq L$, 则有数列 $x_n \rightarrow a+0$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

证 当 $\lambda = l$ 或 $\lambda = L$ 时结论都是显然的. 因此设

$$l < \lambda < L.$$

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, $a_n \rightarrow a+0$, $b_n \rightarrow a+0$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L$.

于是, 存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$f(a_n) < \lambda \text{ 及 } f(b_n) > \lambda.$$

再由 $f(x)$ 的连续性知, 在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n , 使

$$f(x_n) = \lambda (n > N).$$

这样选取的 $\{x_n\}$, 由于 $a_n \rightarrow a+0$, $b_n \rightarrow a+0$, 故 $x_n \rightarrow a+0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. 反函数. 用参数表示的函数

1° 反函数的存在及其连续性 若函数 $y = f(x)$ 具有下列性质, (1)

在区间 (a, b) 上有定义并连续; (2) 在严格的意义上说来, 于此区间上是单调的, 则有单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A, B) 上有定义并连续, 而且在严格的意义上说来, 是相应地单调的, 其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 和 } B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x = g(y)$, 它在具有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y)) = y$, 则被了解为已知连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝。

2° 以参数表示的函数的连续性 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a, β) 上有定义并且是连续的, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格地单调的, 则方程组

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

在区间 (a, b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中 $a = \lim_{t \rightarrow a+0} \varphi(t)$ 及 $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

759. 求线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

的反函数. 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解之得反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ 或写成 } x = \frac{-yd+b}{yc-a}.$$

欲反函数与已知函数相同, 只须

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-xd+b}{cx-a}.$$

解之得 $a+d=0$,

此即所求的条件.

760. 设

$$y = x + [x],$$

求反函数 $x=x(y)$.

解 若当 $k \leq x < k+1$, 即当

$$2k \leq y < 2k+1$$

时, $[x]=k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 此时 $y=x+k$, 即反函数为 $x=y-k$.

761. 证明: 有唯一的连续函数 $y=y(x) (-\infty < x < +\infty)$ 满足于克卜勒方程

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

证 由 640 题知叙列

$$y_0 = x,$$

$$y_1 = x + \varepsilon \sin y_0,$$

$$y_2 = x + \varepsilon \sin y_1,$$

.....

$$y_n = x + \varepsilon \sin y_{n-1},$$

.....

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ 的唯一的程.

现在证明 $y=y(x)$ 是连续的. 我们只须证明当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y(x) \rightarrow y(x_0)$. 为此, 我们考虑

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &= |(x - x_0) + \varepsilon [\sin y_{n-1}(x) - \sin y_{n-1}(x_0)]| \\ &\leq |x - x_0| + \varepsilon |y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x_0)|. \end{aligned}$$

逐次应用此不等式, 即得

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n) \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} |x - x_0|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便有

$$|y(x) - y(x_0)| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} |x - x_0| \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

于是, 显然有 $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

762. 证明: 方程

$$\operatorname{ctg} x - kx$$

对于每一个实数 k ($-\infty < k < +\infty$) 在区间 $0 < x < \pi$ 中有唯一连续的根 $x = x(k)$.

证 令 $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$. 显然, 在 $(0, \pi)$ 上 $\operatorname{ctg} x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上也是连续的严格减函数, 并且, 很明显

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = -\infty.$$

由此可知, 对每一实数 k ($-\infty < k < +\infty$), 恰有一个 $x \in (0, \pi)$, 使 $f(x) = k$, 即 $\operatorname{ctg} x = kx$. 另外, 由于 $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上是连续的严格减函数, 故 $k - f(x)$ 的反函数 $x = x(k) = f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty < k < +\infty$ 上的连续的严格减函数. 此 $x = x(k)$ 即方程 $\operatorname{ctg} x = kx$ 的根.

綜上述, 可知: 对任何 $-\infty < k < +\infty$, 方程 $\operatorname{ctg} x = kx$ 在 $(0, \pi)$ 上具有唯一的根 $x = x(k)$, 而且 $x(k)$ 是 k ($-\infty < k < +\infty$) 的连续的严格减函数. 证毕.

763. 非单调的函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 可否有单值的反函数?

解 可以, 例如函数

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单值的, 但不是单调的函数, 而其反函数仍为此函数本身.

764. 在甚么情形下, 函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一的函数?

解 为统一坐标起见, 我们把 $y=f(x)$ 的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有

$$f^{-1}(x) \equiv f(x),$$

即 $x=f(f(x))$, 这就是所求的条件.

765. 证明不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$$

的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$ 及 $\operatorname{sgn}^2x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$. 于是反函数在 $|y| \geq 1$ 及 $y=0$ 有定义:

$$x = \begin{cases} \sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & \text{当 } y \geq 1 \text{ 时;} \\ -\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & \text{当 } y \leq -1 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } y=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

766. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是严格地单调的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调下降. 如果结论不真, 则在 (a, b) 内总存在一个 a_1 及数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} > a_1.$$

由于 $f(x)$ 严格单调下降, 故有

$$f(x_{n_k}) < f(a_1) < f(a).$$

于是, $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \leq f(a_1)$, 得出矛盾,

因此, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

767. $y = x^2$.

解 反函数的单值连续分枝为

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty)$$

及 $x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$

768. $y = 2x - x^2$.

解 由于 $x^2 - 2x + y = 0$, 故

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

于是单值连续分枝为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y} \quad \text{及} \quad x = 1 + \sqrt{1 - y} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

769. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2 y + 2x + y = 0$, 故

$$x = \begin{cases} \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, & \text{当 } y \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y(1 + \sqrt{1-y^2})} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} = \infty,$$

故反函数的连续分支为

$$x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

及 $x = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1).$

770. $y = \sin x.$

解 单值连续分枝为

$$x = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(|y| \leq 1).$$

771. $y = \cos x.$

解 单值连续分枝为

$$x = 2k\pi \pm \arccos y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (|y| \leq 1).$$

772. $y = \operatorname{tg} x.$

解 单值连续分枝为

$$x = \operatorname{arctg} y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(-\infty < y < +\infty).$$

773. 证明连续函数 $y = 1 + \sin x$ 对应于区间 $0 < x < 2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然, 当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $-1 \leq \sin x \leq 1$, 从而 $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$. 而由于 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, y|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0$. 而 $y = 1 + \sin x$ 是

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数, 故由介值定理知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到

$\frac{3\pi}{2}$ 时, y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0 < x <$

2π 时, y 的值的集合是线段 $[0, 2]$.

774. 证明等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

证 令 $\varphi = \arcsin x$, 则得 $\sin \varphi = x$, 从而

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = x.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi$; 而在 $[0, \pi]$ 内有唯一的数, 它的余弦等于 x . 因此, 得

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

即

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 证明等式

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

证 当 $x > 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arctg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. 又 $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg} \varphi = x$, 故

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{x}.$$

因为 $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$, 而在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有唯一的数, 使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

即当 $x > 0$ 时, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

当 $x < 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arctg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi <$

0. 又

$$\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{tg} \varphi = x, \text{ 即 } \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{x},$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \varphi < 0$, 而在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ 内有唯一的

数, 使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$-\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

即当 $x < 0$ 时, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

776. 证明反正切相加的定理:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \epsilon \pi,$$

式中 $\epsilon = \epsilon(x, y)$ 为取值: 0, 1, -1 三者之一的函数.

当已知 x 的值时, 对于怎样的 y 值, 函数 ϵ 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 ϵ 连续的对应域, 并求此函数在所求得的域内的数值.

证 由于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

故有

$$-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi.$$

若 x 和 y 的符号相反, 则

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0$ 和 $y > 0$, 则

$$0 < \arctg x + \arctg y < \pi.$$

再看这个和是位于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 还是 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. 条件

$$0 < \arctg x + \arctg y < \frac{\pi}{2},$$

即

$$\arctg x < \frac{\pi}{2} - \arctg y,$$

它相当于 $x < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arctg y\right) = \operatorname{tg}(\arctg y) = \frac{1}{y}$,

也即 $xy < 1$.

因此, 当 $x > 0, y > 0, xy < 1$ 时, 此和位于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 同法可证, 当 $x > 0, y > 0, xy > 1$ 时, 此和位于 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

仿此, 又可证得: 当 $x < 0, y < 0, xy < 1$ 时, 此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; 当 $x < 0, y < 0, xy > 1$ 时, 此和位于 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

总之, 若 $xy < 1$, 则此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 若 $x > 0, xy > 1$, 则此和位于 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; 若 $x < 0, xy > 1$, 则此和位于 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

其次, 我们考虑此和的正切

$$\operatorname{tg}(\arctg x + \arctg y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

现今 $u = \arctg x + \arctg y, v = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$, 则得

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, 故当 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ 时, $u = v$; 当 $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ 时, $v + \pi = u$; 当 $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ 时, $u = -\pi + v$. 因此, 我们证得:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x > 0, xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x < 0, xy > 1, \end{cases}$$

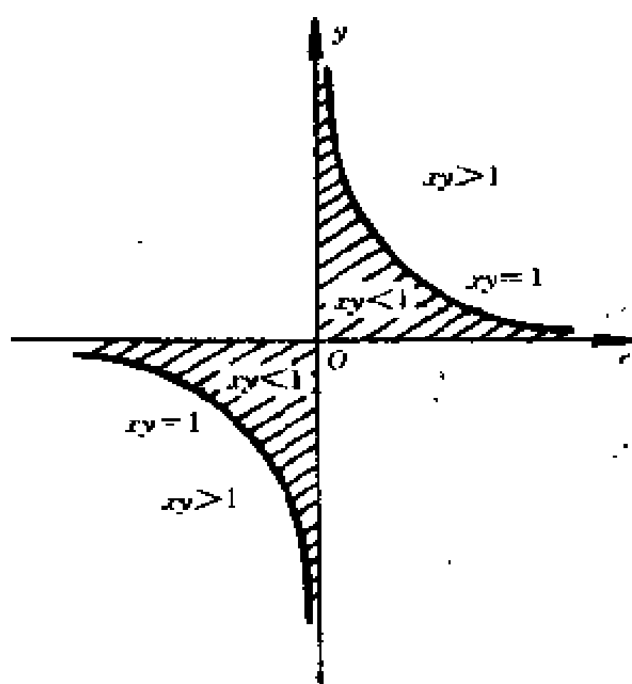


图 1.313

当 x 固定时, 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 ϵ 不连续, 因为此时 (例如设 $x > 0$), 当 $y > \frac{1}{x}$ 时 $\epsilon \equiv 1$, 而当 $y < \frac{1}{x}$ 时 $\epsilon \equiv 0$.

如图 1.313 所示, 曲线 $xy=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x, y)$ 的不连续域.

当 $xy < 1$ 时, $\varepsilon=0$; 当 $x > 0, xy > 1$ 时, $\varepsilon=1$; 当 $x < 0, xy > 1$ 时, $\varepsilon=-1$.

777. 证明反正弦相加的定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-)^{\varepsilon} \arcsin (x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \varepsilon \pi$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中, 若 $xy \leq 0$ 或 $x^2 + y^2 \leq 1$, $\varepsilon=0$; 若 $xy > 0$ 及 $x^2 + y^2 > 1$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$.

证 令 $u = \arcsin x + \arcsin y$ ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), 即得

$$\sin u = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}.$$

由此, 还不能断定

$$u = \arcsin (x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}).$$

事实上, u 及 $v = \arcsin (x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内, 其中 v 始终位在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, 而 u 可有三种情形:

$$\text{情形 I: } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $xy \leq 0$, 则不是 $0 \leq x \leq 1$ 及 $-1 \leq y \leq 0$ 就是 $-1 \leq x \leq 0$ 及 $0 \leq y \leq 1$, 不论哪一种情况, 总有

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0 \text{ (或交换)}$$

因而

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y = u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0, y > 0$ 时, 显然有 $u \geq 0$. 条件 $u \leq \frac{\pi}{2}$

即

$$u = \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

相当于

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数, 故这又相当于

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y),$$

或 $x \leq \sqrt{1-y^2}$, 即 $x^2 + y^2 \leq 1$.

同法可证, 若 $x < 0, y < 0$ 时, 必 $u \leq 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2} \leq u$ 相当于 $x^2 + y^2 \leq 1$.

情形 I: $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$.

在 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ 时, 必 $x > 0, y > 0$. 条件

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi,$$

即

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y,$$

两端取正弦, 即得 $x^2 + y^2 > 1$.

情形 II: $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$,

在这种情形下必 $x < 0, y < 0$. 条件

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leq \pi,$$

因此,即 $x^2+y^2>1$.

总之,当 $xy\leq 0$ 或 $xy>0$ 但 $x^2+y^2\leq 1$ 时,必有 $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq \frac{\pi}{2}$; 当 $x>0, y>0, x^2+y^2>1$ 时,必 $\frac{\pi}{2}<u\leq \pi$; 当 $x<0, y<0, x^2+y^2>1$ 时,必 $-\pi\leq u<-\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2}\leq u\leq \frac{\pi}{2}$ 时, $u=v$; 当 $\frac{\pi}{2}<u\leq \pi$ 时, $u=\pi-v$; 当 $-\pi\leq u<-\frac{\pi}{2}$ 时, $u=-\pi-v$.

因此,最后得

$$\begin{aligned} & \arcsin x + \arcsin y \\ &= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } xy\leq 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leq 1; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } x>0, y>0, x^2+y^2>1; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{其 } x<0, y<0, x^2+y^2>1. \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \arcsin x + \arcsin y \\ &= (-1)^\epsilon \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy\leq 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leq 1; \\ \operatorname{sgn} x, & \text{若 } xy>0 \text{ 及 } x^2+y^2>1, \end{cases}$
 $(|x|\leq 1, |y|\leq 1).$

778. 证明反余弦相加的定理:

$$\begin{aligned} & \arccos x + \arccos y \\ &= (-1)^\epsilon \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) + 2\epsilon\pi \end{aligned}$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

其中, 若 $x+y \geq 0, \epsilon=0$; 若 $x+y < 0, \epsilon=1$.

证 由基本的不等式

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{及} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

$$\text{有} \quad 0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi.$$

$$\text{若} \quad 0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi,$$

$$\text{则} \quad \arccos x \leq \pi - \arccos y.$$

由于 $\arccos x$ 及 $\pi - \arccos y$ 都含在 $[0, \pi]$ 内, 而在此区间内余弦是减函数, 故有

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -y,$$

即

$$x+y \geq 0$$

同法可证得, 若

$$\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi,$$

则

$$x+y < 0.$$

又由于

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2},$$

故知

$$u = \arccos x + \arccos y$$

$$\text{及} \quad v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦. 因 v 始终在 0 与 π 之间, 故知:

$$\text{若 } 0 \leq u \leq \pi, \text{ 则 } u=v; \text{ 若 } \pi < u \leq 2\pi, \text{ 则 } u=2\pi-v.$$

因此, 最后得

$$\arccos x + \arccos y$$

$$= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad \text{若 } x+y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad \text{若 } x+y < 0, \end{cases}$$

此即所欲证明的公式.

779. 作函数的图形:

$$(a) y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(6) y = \arcsin 2x \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x.$$

解 (a) 利用 777 题的结果得知:

由于 $x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1$, 故

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x \sqrt{1-(1-x^2)} - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x|x| - 1 + x^2). \end{aligned}$$

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $y = -\frac{\pi}{2}$; 当 $0 < x \leq 1$ 时, $y = \arcsin(2x^2 - 1)$. 可以证明,

$\arcsin(2x^2 - 1) - 2\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$, 故有

$$y = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时,} \\ 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}, & \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

如图 1·314 所示.

(6) 由于

$$2\arcsin x = \arcsin x + \arcsin x$$

$$= \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

故当 $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = -(\pi + 4\arcsin x)$;

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = 0$;

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$ 时, $y = \pi - 4\arcsin x$.

如图 1·315 所示。

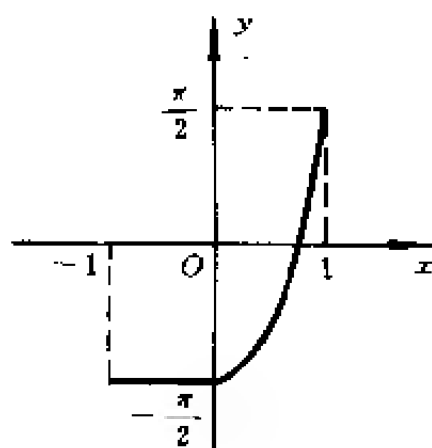


图 1·314

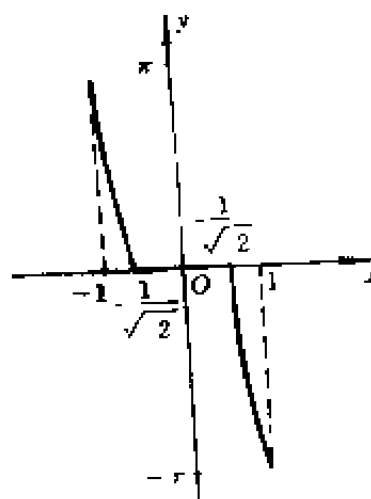


图 1·315

780. 函数 $y = y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x = \arctan t, y = \operatorname{arctg} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 在怎样的域上此函数才有定义?

解 由条件 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \pi$ 且

$$\operatorname{tg} x = t, \operatorname{ctg} y = t,$$

即得

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

从而当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$y = \frac{\pi}{2} - x.$$

781. 设

$$x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

参数 t 变化的域怎样, 即可视变数 y 为变数 x 的单值函数? 求在各个域上 y 的表示式.

解 由于 $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, 故

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

当 $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$ 时, 即 $e^t \geq e^{-t}$ 或 $e^{2t} \geq 1$ 或 $t \geq 0$ 时,

$$y = \sqrt{x^2 - 1};$$

当 $t \leq 0$ 时, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$.

不论 t 为何值, $x \geq 1$, 故 $\sqrt{x^2 - 1}$ 有意义. $t = 0$ 是函数 $y = y(x)$ 单值区域的分界值.

782. 要值方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么?

解 其必要而且充分的条件为, 值 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, 函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然, 则存在 x^* 及 $t_1 \neq t_2$, 使

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x^* \text{ 且 } \psi(t_1) \neq \psi(t_2).$$

于是, 对于这样的 x^* , 一方面有 $y_1 = \psi(t_1)$ 及 $y_2 = \psi(t_2)$,

另一方面又有 $y_1 \neq y_2$, 这样 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此, 使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, $\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足, 则对于任一 $x^* \in \{\varphi(t)\}$, 有 t^* 使

$$\varphi(t^*) = x^*, \quad \psi(t^*) = y^*$$

有意义, 这样定义的函数 $y = y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同, 因此它由 x^* 唯一确定, 从而 y 定义为 x 的单值函数.

783. 在怎样的条件下, 二方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

$$\text{及 } x = \varphi[\chi(\tau)], y = \psi[\chi(\tau)] \quad (a < \tau < \beta)$$

定义出同一的函数 $y = y(x)$?

解 当 $a < \tau < \beta$ 时, 函数 $\chi(\tau)$ 的值的集应为区间 (a, b) .

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义并且是连续的, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在怎样的场合下, 有定义在区间 (A, B) 上的单值函数 $f(x)$, 使得

$$\text{当 } a < x < b \text{ 时, } \psi(x) = f[\varphi(x)]?$$

解 显然, 要求对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值 (其中 u 为区间 (A, B) 中的任一给定的数), 函数 $\psi(x)$ 应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时, 对 $u \in (A, B)$ 可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中 x 为满足 $\varphi(x) = u$ ($a < x < b$) 的任何数. 上述条件

保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§ 9. 函数的一致连续性

1° 一致连续性的定义 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 $x', x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在已知集合(区间、线段等) $X = \{x\}$ 上为一致连续的.

2° 康托尔定理 在有界的闭区间 $[a, b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂的车间制造正方形薄板, 其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之间的值. 为了使不论何种边长(在上述的范围内)的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε , 问可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工, 设 (a) $\varepsilon = 1$ 平方厘米; (б) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米; (в) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米, 计算 δ 的值.

解 $y = x^2$. 由于,

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| |x' + x''| \leq 20 |x' - x''|,$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$ 时, 只要 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是, 在加工薄板边长时, 只要取公差 $\delta \leq \frac{\varepsilon}{20}$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 即可满足要求.

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米 = 0.5 毫米;

(6) 当 $\varepsilon = 0.01$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米
= 0.005 毫米;

(B) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{0.0001}{20}$
= 0.000005 厘米 = 0.00005 毫米.

786⁺ 圆柱形鞘筒之宽度为 ε , 长度为 δ , 将鞘筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲线滑动, 但筒之轴须保持平行于 Ox 轴. 为了使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所限定的部分, 问 δ 应等于甚么? 设 (a) $\varepsilon = 1$; (6) $\varepsilon = 0.1$; (B) $\varepsilon = 0.001$; (r) ε 为任意小数.

解 $y = \sqrt[3]{x}$, 对于 $y' \neq y''$, 由于

$$\begin{aligned} |y' - y''| &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y' y'' + y''^2} \right| \\ &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2} \right| \\ &\leq \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2} \end{aligned}$$

即

$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leq |y'^3 - y''^3| = |x' - x''|$ 或 $|y' - y''| \leq \sqrt[3]{4|x' - x''|}$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|y' - y''| < \varepsilon$, 只要 $4|x' - x''| < \varepsilon^3$, 或 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|\sqrt[3]{x^I} - \sqrt[3]{x^{II}}| < \epsilon.$$

(a) 当 $\epsilon = 1$ 时, $\delta < \frac{1}{4}$;

(b) 当 $\epsilon = 0.1$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-4}$;

(c) 当 $\epsilon = 0.001$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-10}$;

(r) 当 ϵ 为任意小数时, $\delta < \frac{\epsilon^3}{4} (\epsilon \leq 1)$.

787. 以《 $\epsilon - \delta$ 》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义: 函数 $f(x)$ 在某集合(区间, 线段)上连续, 但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E . 所需论断的《 $\epsilon - \delta$ 》说明如下: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 及 $x_0 \in E$, 总存在一个数 $\delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

同时, 至少存在一个 $\epsilon_0 > 0$, 使对于任意给定的 $\delta > 0$, 都可找到 $x_1, x_2 \in E$, 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon_0.$$

788. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的, 但在此区间上并非一致连续的.

证 连续性是显然的, 现证其不一致连续. 考虑 $(0, 1)$ 上的两串点

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{n+1}.$$

则当 $0 < \epsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 取得充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

789. 证明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x \neq 0$ 时, 由基本初等函数在其定义域的连续性可知, $f(x)$ 是连续的, 同时, 由于 $|f(x)| \leq 1$, 因而它也是有界的.

现考虑 $(0, 1)$ 上的两串点 $x_n = \frac{2}{n}, x_n' = \frac{2}{n+1}$, 则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

790. 证明: 函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的. 现证其

不一致连续性.

考虑 $(-\infty, +\infty)$ 上的两串点

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 如何选取, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非一致连续.

791. 证明: 若函数 $f(x)$ 在域 $a \leq x < +\infty$ 上有定义并且是连续的, 而且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在, 则 $f(x)$ 在此域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 故必存在 $X > a$, 使当 $x' > X, x'' > X$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 连续, 故一致连续, 从而必有正数 δ' 存在, 使当 $x' \in [a, X+1], x'' \in [a, X+1], |x' - x''| < \delta'$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

令 $\delta = \min\{\delta', 1\}$. 现设 x', x'' 为满足 $a \leq x' < +\infty, a \leq x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 的任何两点. 由于 $|x' - x''|$

$< \delta$, 故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a, X+1]$, 或同时满足 $x' > X, x'' > X$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致连续. 证毕.

792. 证明: 无界函数

$$f(x) = x + \sin x$$

于全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

证 $|f(x') - f(x'')| = |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')|$

$$\leq |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leq 2|x' - x''|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, 则当 $-\infty < x' < +\infty, -\infty < x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的: (a) $(-l, l)$, 这里 l 为随便多大的正数; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上?

解 当 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2l|x_1 - x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 且 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

(b) 取 $\varepsilon_0 = 1$, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大,

我们总可以使 $x'_n = n + \frac{1}{n}, x''_n = n$ 的距离 $|x'_n - x''_n|$

$= \frac{1}{n} < \delta$, 但是,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \epsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

794. $f(x) = \frac{x}{4-x^2} (-1 \leq x \leq 1).$

解 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2} \right|$
 $= \left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| |x_1 - x_2|.$

由于 $\left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| < \frac{4+1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} < 1,$

故对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 则对满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的 x_1, x_2 (x_1, x_2 属于 $[-1, 1]$) 值, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上一致连续.

795. $f(x) = \ln x (0 < x < 1).$

解 考虑 $x_n = \frac{1}{n}, x_n' = \frac{1}{2n}$, 则当 $0 < \epsilon_0 < \ln 2$ 时, 不论 δ 如何选取, 只要 n 充分大, 我们总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = \ln 2 > \epsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内并非一致连续.

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x} (0 < x < \pi).$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 我们定义函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0, \\ \frac{\sin x}{x} & 0 < x < \pi; \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 根据康托尔定理便知, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致连续, 从而 $f(x)$ 也在 $(0, \pi)$ 上一致连续.

797. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} (0 < x < 1).$

解 取 $\varepsilon_0 = 1$, 令 $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}, x'_n = \frac{1}{n\pi}$ (n 为正整数), 显然 x_n, x'_n 均属于 $(0, 1)$. 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{(2n+1)n\pi} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = e^{\frac{1}{n\pi}} > 1 = \varepsilon_0.$$

因而 $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上非一致连续.

798. $f(x) = \arctg x (-\infty < x < +\infty).$

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1], [0, +\infty)$ 上连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 及 $(-\infty, 1]$ 上均一致连续.

于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1], |x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\epsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta_2(\epsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

成立.

今取 $\delta(\epsilon) = \min\{1, \delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$, 则当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta(\epsilon)$ 时, x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty, 1]$, 或同时属于 $[0, +\infty)$, 故恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

799. $f(x) = \sqrt{x} (1 \leq x < +\infty)$.

解 考虑 $[1, +\infty)$ 内任意两点 x_1, x_2 .

$$\left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

于是, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = 2\epsilon$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 时, 恒有

$$\left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right| < \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon = \epsilon.$$

因而 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

800. $f(x) = x \sin x (0 \leq x < +\infty)$.

解 考虑点 $x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, $x'_n = 2n\pi$, 则

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |f(x_n) - f(x'_n)| &= \left(2n\pi + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{1}{n} \\ &= 2n\pi \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0,$$

$$\text{及 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2\pi \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right] = 2\pi,$$

所以,

$$|f(x_n) - f(x_n')| \rightarrow 2\pi \quad (n \rightarrow \infty).$$

现取 $\varepsilon_0 = 2\pi - 1$. 于是, 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有 $|x_n - x_n'| < \delta$, 并且

$$|f(x_n) - f(x_n')| > \varepsilon_0 = 2\pi - 1.$$

因而 $f(x) = x \sin x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

801. 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1 = (-1 < x < 0) \text{ 及 } J_2 = (0 < x < 1)$$

上是一致连续的, 但在它们的和

$$J_1 \cup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致连续的.

证 在 $J_1 = (-1 < x < 0)$ 上 $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$, 在 $J_2 =$

$(0 < x < 1)$ 上 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = -1,$$

故必存在 $\eta > 0$ ($\eta < 1$), 使当 $0 < x_1 < \eta$, $-\eta < x_2 < 0$

时恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$. 现取 $\varepsilon_0 = 1$, 则不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 都可取两点 x_1' 和 x_2' , 使 $0 < x_1' < \min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\} < x_2' < 0$. 于是 $|x_1' - x_2'| < \delta$, 但是,

$$|f(x_1') - f(x_2')| > \varepsilon_0 = 1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$ 上非一致连续.

802. 对于 $\varepsilon > 0$, 求使函数 $f(x)$ 在已知区间上满足一致连续的条件的 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (任何的!) 设:

(a) $f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$

(б) $f(x)x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$

(в) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$

(г) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$

(д) $f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$

(e) $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ 及 $f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$

解 (a) $|f(x_1) - f(x_2)| = 5|x_1 - x_2|.$

只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

(б) $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 - 2|.$

由于 $-2 \leq x \leq 5$, 故 $|x_1 + x_2 - 2| \leq 8$, 于是只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

(в) $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{0.01}.$

只需取 $\delta = 0.01\varepsilon$.

(r) 对于 $a \geq 0, b \geq 0$, 显然有不等式

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

成立.

对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon^2$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leq \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \epsilon;$$

同理可有

$$\sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 + \delta} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_1} + \epsilon.$$

则恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \epsilon.$$

(d) $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2|$

$$\leq 2|x_1 - x_2| + \left| \left(\frac{\pi}{2} - x_1 \right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_2 \right) \right| = 3|x_1 -$$

$x_2|$

只需取 $\delta = \frac{\epsilon}{3}$.

(e) 任给 $\epsilon > 0$. 当 $x_1, x_2 \in \left[\frac{\epsilon}{3}, \pi \right]$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{x_2} + 1 \right) \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{3 + \epsilon}{\epsilon} |x_1 - x_2|.$$

取 $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon^2}{3 + \epsilon} \right\}$. 现设 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 下证必有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $x_1 \geq \frac{\epsilon}{3}$, 则 x_1, x_2 均属于 $\left[\frac{\epsilon}{3}, \pi \right]$, 故由上述, 知

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{3 + \epsilon}{\epsilon} \cdot |x_1 - x_2| < \frac{3 + \epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon^2}{3 + \epsilon} = \epsilon.$$

若 $0 \leq x_1 < \frac{\epsilon}{3}$, 则 $x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{2\epsilon}{3}$. 于是

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| + |x_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon \quad (\text{当 } x_1 > 0 \text{ 时}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| 0 - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_2| < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon, \end{aligned}$$

(当 $x_1 = 0$ 时)

总上述, 只要 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

803. 需要尽量地把闭区间 $[1, 10]$ 划分为几个彼此相等的线段, 才能使得函数 $f(x) = x^2$ 在这些线段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

解 设分为相等的 n 段, 则对于每段中的任意两点均有

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{9}{n}. \text{ 于是,}$$

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq \frac{(10 + 10)9}{n} \\ = \frac{180}{n}.$$

按题设,我们只需 $\frac{180}{n} < 0.0001$,也即

$$n > 1800000.$$

因此,应把 $[1, 10]$ 等分成至少为 1800000 个的等长的线段,就能满足要求.

804. 证明: 在区间 (a, b) 上有无穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有无穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘,故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在有限区间 (a, b) 上一致连续,要证 $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 也在 (a, b) 上一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,故有 $\delta_1 > 0$ 存在,使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' ,只要 $|x' - x''| < \delta_1$,就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又由于 $g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,故又有 $\delta_2 > 0$ 存在,使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' ,只要 $|x' - x''| < \delta_2$,就有 $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $|x' - x''| < \delta$ (x', x'' 为 (a, b) 中任何两点)时,恒有

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| \leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 下证 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 为此先证一个结论: 若函数 $F(x)$ 在

有限区间 (a, b) 上一致连续, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 上必有界. 事实上, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$ 存在, 使对于 (a, b) 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 特别, 当 $a < x' < a + \delta, a < x'' < a + \delta$ 时, 必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$; 当 $b - \delta < x' < b, b - \delta < x'' < b$ 时, 也必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 因此, 根据柯西收敛准则, 知 $F(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$ 与 $F(b - 0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ 都存在(有限). 现在 $[a, b]$ 上定义函数 $F^*(x)$;

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ F(a + 0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ F(b - 0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $F^*(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 从而有界, 由此可知 $F(x)$ 在 (a, b) 上有界.

根据刚才已证的结论, 存在常数 $L > 0$ 与 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq L, |g(x)| \leq M (a < x < b)$.

任给 $\varepsilon > 0$, 根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 上的一致连续性, 可取 $\delta > 0$, 使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}, |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知,

$$\begin{aligned} & |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= |[f(x') - f(x'')][g(x') + f(x'')][g(x') - g(x'')]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

注. 当 (a, b) 是无穷区间时, (a, b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 必也一致连续, 但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续. 例如, 设 $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, 函数 $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 则函数 $[f(x)]^2 = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续(参看 793 题(6)).

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a, b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a, b) 上是一致连续的.
证 分三种情形论之.

(i) 设 (a, b) 是有限区间. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调有界, 故极限 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也一致连续, 故 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(ii) a 为有限数, $b = +\infty$. 此时, 令

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < +\infty \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时.} \end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在(有限), 故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 一致连续, 从而 $f(x)$ 在 $a < x < +\infty$ 一致连续.

若 $a = -\infty, b$ 为有限数. 考虑函数 $g(x) = f(-x)$, $(-b < x < +\infty)$ 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(iii) $a = -\infty, b = +\infty$. 任给 $\varepsilon > 0$. 利用(ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $0 < x < +\infty$ 上一致连续, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(0, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

同样利用(ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $-\infty < x < 1$ 上一致连续, 故对于同一个 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty, 1)$ 且 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

现令 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $-\infty < x' < +\infty, -\infty < x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 时, x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0, +\infty)$, 或是同属于区间 $(-\infty, 1)$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 证毕.

806. 证明: 在有穷区间 (a, b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的.
证 必要性: 若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也是一致连续的.

充分性: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 根据 804 题的证明过程, 知 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上 $f^*(x) = f(x)$.
故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续延拓. 证毕.

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的连续模数.

证明: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

证 必要性: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使 (a, b) 中任何两点 x_1, x_2 , 只要 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0 < \delta < \delta'$, 则当 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 时, 必 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由此可知, $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性: 设

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使当 $0 < \delta < \delta'$ 时, 恒有

$$\omega_f(\delta) < \varepsilon.$$

现设 x_1 与 x_2 是 (a, b) 中满足 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 的任何两点.

若 $x_1 = x_2$, 则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \epsilon;$$

若 $x_1 \neq x_2$, 令 $|x_1 - x_2| = \delta'$, 则 $0 < \delta^* < \delta'$, 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta^*) < \epsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续. 证毕.

808. 设:

$$(a) f(x) = x^3 (0 \leq x \leq 1);$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x} (0 \leq x < a) \text{ 及 } (a < x < +\infty);$$

$$(c) f(x) = \sin x + \cos x (0 \leq x \leq 2\pi).$$

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$ (参阅前题) 作下形的估价

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数.

解 (a) $|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leq 3\delta$,
于是,

$$\omega_f(\delta) \leq 3\delta.$$

(b) 当 $0 \leq x \leq a$ 时 [参看 802 题 (r) 的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \leq \sqrt{\delta},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta};$$

当 $a < x < +\infty$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

$$(B) f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } & \left| \sqrt{2} \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \sqrt{2} \delta,$$

于是

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{2} \delta.$$

§ 10. 函数方程

809. 证明: 对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是齐次线性函数:

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证: 若 $f(x)$ 满足(1), 则对任何有理数 c , 必有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

事实上, 当 m 与 n 为正整数时, 有

$$\begin{aligned} f(mx) &= f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x) \\ &= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \cdots \\ &= f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = mf(x); \\ f(x) &= f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \text{ 故 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x). \end{aligned}$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y = 0$, 得 $f(x) = f(x) + f(0)$, 故 $f(0) = 0$; 又在(1)中令 $y = -x$, 并注意已证的结果 $f(0) = 0$, 得 $f(-x) = -f(x)$.

于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c , 有 $f(cx) = cf(x) (-\infty < x < +\infty)$. 下面, 我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c , 此式也成立. 事实上, 设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n , 使 $c_n \rightarrow c (n \rightarrow \infty)$. 于是

$$f(C_n x) = C_n f(x), (n = 1, 2, \dots).$$

在此式两端令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 并注意到函数 f 在点 cx 连续, 即得 $f(cx) = cf(x)$. 于是, 对任何实数 x 和 c , 有 $f(cx) = cf(x)$. 由此可知, 对任何实数 x , 有

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax,$$

其中 $a = f(1)$. 证毕.

810. 证明: 满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

证 由 809 题之证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 成立. 为确定起见, 设 $f(x)$ 是单调递增的, 设 c 是无理数, 要证 $f(cx) = cf(x) (-\infty < x < +\infty)$. 只就 $x > 0$ 讨论之 ($x \leq 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$

与 $\{c_n'\}$ 使:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c < \cdots < c_3' < c_2' < c_1',$$

并且 $c_n \rightarrow c, c_n' \rightarrow c (n \rightarrow \infty)$. 由于 $x > 0$, 故

$$c_1x < c_2x < c_3x < \cdots < cx < \cdots < c_3'x < c_2'x < c_1'x,$$

并且 $c_nx \rightarrow cx, c_n'x \rightarrow cx (n \rightarrow \infty)$. 另外, 我们有

$$f(c_nx) = c_nx, f(c_n'x) = c_n'x (n = 1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的, 故在点 cx 的左、右极限均存在有限, 并且满足

$$f(cx - 0) \leq f(cx) \leq f(cx + 0).$$

在前面两个等式中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$$f(cx - 0) = cx, \quad f(cx + 0) = cx.$$

由此可知 $f(cx) = cx$.

以下证明同 809 题, 不再重复.

811. 证明: 满足方程(1) 且在某小区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中为有界的函数 $f(x)$, 是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中的有界性来证明对于任何无理数 c , 此式也成立. 用反证法, 假定对于某无理数 c_0 以及某实数 x_0 , 有 $f(c_0x_0) \neq c_0f(x_0)$. 令 $f(c_0x_0) - c_0f(x_0) = a$, 则 $a \neq 0$. 今取一串有理数 $\{c_n\}$, 使 $c_n \rightarrow c_0 (n \rightarrow \infty)$. 于是, 对于任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= mf[(c_0 - c_n)x_0] \\ &= m[f(c_0x_0) - f(c_nx_0)] \\ &= m(c_0 - c_n)f(x_0) + ma, \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots; m = 1, 2, 3, \cdots).$$

任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $m > \frac{2G}{|\alpha|}$. 对此 m , 再取定一个正整数 n , 使

$$|m(c_0 - c_n)|x_0| < \varepsilon, |m(c_0 - c_n)f(x_0)| < G.$$

令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$. 于是 $\bar{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 并且

$$|f(\bar{x})| \geq |m\alpha| - |m(c_0 - c_n)f(x_0)| > 2G - G = G.$$

由所给 $G > 0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数 c , 也有

$$f(cx) = cf(x).$$

以下证明同 809 题, 不再重复.

812. 证明: 对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数:

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数.

证 先证必 $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$. 事实上, 由 $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, 知 $f(x) \geq 0$. 由于 $f(x) \not\equiv 0$, 故存在 x_0 使 $f(x_0) > 0$. 在 (2) 中令 $x = x_0, y = 0$, 得 $f(x_0) = f(x_0)f(0)$, 故 $f(0) = 1$; 又在 (2) 中令 $y = -x$, 得 $1 = f(0) = f(x)f(-x)$, 故 $f(x) \neq 0$. 由此可知 $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$.

当 m 与 n 为正整数时,

$$\begin{aligned} f(mx) &= f((m-1)x + x) = f((m-1)x) \cdot f(x) \\ &= f((m-2)x) \cdot f(x) \cdot f(x) = \cdots = [f(x)]^m; \\ f(x) &= f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \text{ 即 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \end{aligned}$$

$$[f(x)]^{\frac{1}{n}},$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m = [f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = [f(-x)]^{\frac{m}{n}} = [f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知,对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性, 仿 809 之证易知此式对任何无理数也成立. 因此, 对于任何实数 c 与 x , 有

$$f(cx) = [f(x)]^c,$$

从而 $f(x) = f(x \cdot 1) = [f(1)]^x = a^x, a = f(1) > 0$.

注. 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$. 令 $F(x) = \log_a f(x)$, 这里 $a = f(1) > 0$. 于是 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 满足(1)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \log_a f(x+y) = \log_a f(x)f(y) \\ &= \log_a f(x) + \log_a f(y) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

故由 809 题的结果, 知 $F(x) = a^*x$, 这里 $a^* = F(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1$, 从而 $F(x) = x$. 由此可知 $f(x) = a^x$.

813. 证明: 在区间 $(0, \epsilon)$ 中有界并满足方程(2)的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知: $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$, 并且对任何有理数 c , 有 $f(cx) = [f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c , 也有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

用反证法. 假定对某无理数 c_0 , 及某实数 x_0 , 有 $f(c_0x_0) \neq [f(x_0)]^{c_0}$. 显然 $x_0 \neq 0$ (因为 $f(0) = 1$). 不妨设 $x_0 > 0$. 我们有 $f(c_0x_0) = \beta[f(x_0)]^{c_0}$, $\beta > 0, \beta \neq 1$. 不妨设 $\beta > 1$. 取一串有理数 c_n , 使 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_0$, 且 $c_n \rightarrow c_0$ ($n \rightarrow \infty$). 于是, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= \{f[(c_0 - c_n)x_0]\}^m \\ &= f(c_0x_0)^m \cdot f(-c_nx_0)^m = \beta^m \cdot [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)}. \end{aligned}$$

现任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $\beta^m > 2G$. 然后, 再取一个 n , 使

$$0 < m(c_0 - c_n)x_0 < \varepsilon, [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)} > \frac{1}{2}.$$

于是, 令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$, 则 $x \in (0, \varepsilon)$, 且 $f(\bar{x}) > 2G \cdot \frac{1}{2} = G$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 注意, 若 $\beta < 1$, 则需取 $c_1 > c_2 > c_3 > \dots > c_0$, $c_n \rightarrow c$ 并考虑 $f[-m(c_0 - c_n)x_0] = \beta^{-m}[f(x_0)]^{-m(c_0 - c_n)}$. 由此可知, 对任何无理数 c , $f(cx) = [f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同于 812 题, 不再重复.

814. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数:

$$f(x) = \log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 中令 $y = 1$, 得 $f(1) = 0$.

由于 $f(x) \neq 0$, 故存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 先设 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$, $f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0)$, \dots , 利用归纳法, 易知 $f(x_0^{2^n}) = 2nf(x_0) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 故可取某正整数 n , 使 $f(x_0^{2^n}) > 1$. 于是, 根据连续函数性质知, 在 1 与 $x_0^{2^n}$ 之间必存在某 a (显然 $a > 0$) 使 $f(a) = 1$. 现考虑函数 $F(x) = f(a^x) (-\infty < x < +\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足(1)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y) \\ &= F(x) + F(y) \end{aligned}$$

于是, 根据 809 题的结果知 $F(x) = a^* x (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a^* = F(1) = f(a) = 1$. 于是 $F(x) = x$, 即

$$f(a^x) = x;$$

令 $a^x = y$, 则 $x = \log_a y$, 于是

$$f(y) = \log_a y (0 < y < +\infty).$$

若 $f(x_0) < 0$, 则可考虑函数 $g(x) = -f(x)$.

于是 $g(x_0) > 0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$, 故根据刚才已证的结果, 知 $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$, 其中 $a > 0$. 即 $-f(y) = \log_a y$, 或 $f(y) = -\log_a y$.

令 $a^* = \frac{1}{a}$, 则 $a^* > 0$ 且 $-\log_a y = \log_{a^*} y$, 故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a^* > 0$. 证毕.

815. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x) (0 < x < +\infty)$ 是

幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考察函数 $F(x) = f(e^x) (-\infty < x < +\infty)$, 则 $F(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 连续不恒为零, 且满足(2)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y) \\ &= F(x)F(y). \end{aligned}$$

于是, 根据 812 题的结果知

$$F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $b > 0$, 即 $f(e^x) = b^x (-\infty < x < +\infty)$.

令 $e^x = y$, 则 $y > 0$; 显然, 存在唯一的 $a (-\infty < a < +\infty)$, 使 $e^a = b$. 于是

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

证毕.

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程(3)的一切连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

证 因为 $f(xy) = f(x)f(y)$, 所以 $f(1) = f(1)f(1)$, 于是 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

当 $f(1) = 0$ 时, 对于任意实数 x , 均有

$$f(x) = f(1)f(x) \equiv 0.$$

当 $f(1) = 1$ 时, 由于 $f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = 1$, 所以 $f(-1) = \pm 1$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $f(-1) = 1$ 时, 由于

$$f(-x) = f(-1)f(x) = f(x),$$

所以在这种情形下就可把问题归结为对 $0 < x < +\infty$ 中

的 x 进行讨论. 而对于 $x > 0$, 我们已证得 $f(x) = x^a$, 式中 a 为常数^{*}). 然后再利用 $f(-x) = f(x)$, 即得

$$f(x) = |x|^a,$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续, 需 $a \geq 0$.

2° 当 $f(-1) = -1$ 时, 同 1° 可得

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a \quad (a \geq 0).$$

综上所述, 所求的函数为 (1) $f(x) \equiv 0$; 或 (2) $f(x) = |x|^a (a \geq 0)$; 或 (3) $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a (a \geq 0)$.

*) 利用 815 题的结果.

817. 证明: 不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

满足方程 (3).

证 由 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 知, $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)$.

分三种情况讨论:

1° 当 $xy > 0$ 时, x 与 y 同号, 此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 1;$$

2° 当 $xy < 0$ 时, x 与 y 异号, 此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = -1;$$

3° 当 $xy = 0$ 时, 在实数域内, x 与 y 中至少有一个为 0, 于是

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 0.$$

总之, 不论哪一种情形, 均有

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$$

也即函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

818. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的一切连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

解 显见函数

$$f(x) = \cos ax \text{ 或 } f(x) = \cosh ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此, 在方程中令 $y = 0$, 得

$$2f(x) = 2f(x)f(0),$$

则当 $f(x) \neq 0$ 时 $f(0) = 1$. 又令 $x = 0$ 得

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

所以

$$f(-y) = f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性, 故知存在 $c > 0$, 使当 $x \in [0, c]$ 时, $f(x) > 0$. 设 $f(c) = a$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $0 < a \leq 1$ 时,

于是存在 $\theta: 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 使得

$$f(c) = \cos \theta. \quad (1')$$

从而

$$\begin{aligned} f(2c) &= 2[f(c)]^2 - f(0) = 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta, \\ f(3c) &= 2f(2c)f(c) - f(c) = 2\cos 2\theta \cos \theta - \cos \theta \\ &= \cos 3\theta. \end{aligned}$$

利用数学归纳法易证, 对于一切正整数 n , 均有

$$f(nc) = \cos n\theta. \quad (2')$$

又

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right) \right]^2 = \frac{1}{2}[f(0) + f(c)] = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

由于 $f(x) > 0$, 故取正根, 则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3')$$

同样, 利用数学归纳法可得, 对于一切正整数 n , 均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \quad (4')$$

重复应用(1')到(2')的推理过程于(4'), 可知对于一切正整数 m , 均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \quad (5')$$

因此, 对于 $\frac{m}{2^n}$ 型的正实数 x_n , 有

$$f(cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成 $\frac{m}{2^n}$ 型数列的极限, 所以利用极限过程易得

$$f(cx) = \cos(\theta x) \quad (6')$$

由于 $f(-y) = f(y)$, 故(6')式对 $x < 0$ 也成立. 至于当 $x = 0$ 时, $f(cx) = \cos(\theta x)$ 显然成立. 因此, 对于 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数, 均有

$f(cx) = \cos(\theta x)$. 把 cx 换成 x , 并令 $\frac{\theta}{c} = a$, 则得

$$f(x) = \cos ax.$$

2° 当 $a > 1$ 时, 于是存在这样的 θ , 使得

$$f(c) = a = \operatorname{ch}\theta.$$

根据双曲余弦的关系式, 再重复上面的推理过程, 可得

$$f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

当 $a = 0$ 时, $f(x) \equiv 1$.

综上所述, 所求的函数为

$$f(x) = \cos ax \text{ 或 } f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

819. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程组:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

及

$$f(0) = 1 \text{ 和 } g(0) = 0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 考虑函数

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x),$$

则

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f^2(x+y) + g^2(x+y) = [f(x)f(y) \\ &\quad - g(x)g(y)]^2 + [f(x)g(y) + f(y)g(x)]^2 \\ &= F(x)F(y), \end{aligned}$$

由于 $F(0) = 1$ 及 $F(x) \neq 0$, 故

$$F(x) = a^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

式中 $a = F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界, 故只能有 $a = 1$. 因此, 对于一切实数 x , 有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

因为

$$0 = g(0) = g(x-x) = f(x)g(-x) + f(-x)g(x)$$

及

$$\begin{aligned} 1 &= f(0) = f(x-x) \\ &= f(x)f(-x) - g(-x)g(x). \end{aligned}$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$, 然后相加, 得
 $f(-x) = f(x) \cdot [f^2(-x) + g^2(-x)] = f(x)$;
 如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$, 然后相减, 得
 $g(-x) = -g(x)[g^2(-x) + f^2(-x)] = -g(x)$.
 从而可得

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ &+ f(x)f(-y) - g(x)g(-y) = 2f(x)f(y). \end{aligned}$$

于是, 考虑到 $f(x)$ 的有界性, 可得

$$f(x) = \cos ax^{**}),$$

再由 $f^2(x) + g^2(x) = 1$ 可得

$$g(x) = \pm \sin ax,$$

*) 利用 812 题的结果.

* *) 利用 818 题的结果.

820. 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

及

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数是线性函数, 即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned} f(x + \Delta_1 x + \Delta_2 x) - f(x + \Delta_2 x) \\ \equiv f(x + \Delta_1 x) - f(x). \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 得

$$f(\triangle_1 + \triangle_2) - f(\triangle_2) \equiv f(\triangle_1) - f(0).$$

令 $\triangle_2 = n\triangle_1$, 得

$$f[(n+1)\triangle_1] - f(n\triangle_1) \equiv f(\triangle_1) - f(0).$$

利用数学归纳法, 可得

$$f[(n+1)\triangle_1] - f(0) \equiv (n+1)[f(\triangle_1) - f(0)]. \quad (1')$$

关系式(1')可写成

$$f(\triangle_1) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\triangle_1) - f(0)].$$

在上式中令 $n\triangle_1 = m$, 再利用(1')即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) = \frac{m}{n}[f(1) - f(0)],$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n} + b,$$

式中 $a = f(1) - f(0)$ 及 $b = f(0)$ 均为常数.

于是, 对于有理数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

对于无理数 x , 利用 $f(x)$ 的连续性, 即可证得上式仍成立. 事实上, 取有理数列 $x_n \rightarrow x$, 则

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} (ax_n + b) = ax + b.$$

因此, 对于一切实数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$